

# Determinante naše svagdašnje

---

Grgić, Ivana; ...

Source / Izvornik: **Hrvatski matematički elektronički časopis, 2024, 44, 39 - 53**

**Journal article, Published version**

**Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:179:691080>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-04-02**



Repository / Repozitorij:

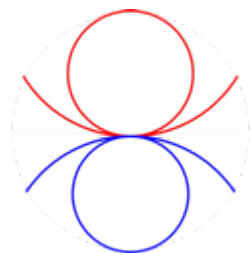
[Repository of the Faculty of Electrical Engineering,  
Mechanical Engineering and Naval Architecture -  
University of Split](#)



UNIVERSITY OF SPLIT



DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI



**math.e**

*Hrvatski matematički elektronički časopis*

## Determinante naše svagdašnje

Cayley-Menger Hesijan Jakobijan Ključne riječi: determinante Vandermonde Wronskijan

### **Ivana Grgić,**

Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i  
brodogradnje, Ruđera Boškovića 32, 21 000 Split,  
Hrvatska; e-mail address: [ipletiko@fesb.hr](mailto:ipletiko@fesb.hr)

### **Mirjana Strukan**

Osnovna škola "Blatine škrape" Split; e-mail  
address: [mirjana.strukan@gmail.com](mailto:mirjana.strukan@gmail.com)

### **Sažetak**

U ovom radu ćemo opisati i objasniti razliku između u nekoliko važnih i poznatih matrica i determinanti nazvanih po slavnim matematičarima. Definirani su Jakobijan, Wronskijan i Hesijan, Vandermondeova i Cayley-Mengerova determinanta, njihovo značenje i područje primjene. Cilj rada je na jednom mjestu objediniti osnove tako važnih determinanti koje profesionalni matematičari, a i mnogi studenti, barem u nekom dijelu života, koriste gotovo svakodnevno.

## **1 Uvod**

U linearnoj algebri determinante igraju ključnu ulogu. Iz tog razloga su jedan od temeljnih matematičkih pojmova s kojim se susreću studenti na prvom godinama ne samo matematičkog, tehničkog, nego i društvenog usmjerenja. Primjena determinanti je zaista široka. Determinante opisuju prirodu rješenja sustava linearnih jednadžbi, ukazuju na linearnu zavisnost/nezavisnost vektora, utjelovljuju određena geometrijska svojstva linearnih transformacija te su najvažniji alat kod pronalaženja svojstvenih vrijednosti matrica. U ovom radu pretpostavljamo da je čitatelju poznat pojam determinante, kao i derivacije funkcija jedne i više varijabli. Cilj rada je na jednom mjestu objediniti osnove važnih determinanti koje profesionalni matematičari, a i mnogi studenti, barem u nekom dijelu života, koriste gotovo svakodnevno.

## 2 Gradijent

Prije nego opišemo Jakobijan i Hessijan, zgodno je uvesti pojam gradijenta. Gradijent je generalizacija pojma derivacije na skalarne funkcije više varijabla. često umjesto riječi funkcija koristimo riječ polje. Pojam polja je uveo irski matematičar Hamilton, u svezi s promatranjem fizikalnih veličina u električnim, magnetnim i drugim poljima. Skalarna i vektorska polja su u stvari drugi naziv za skalarne i vektorske funkcije.

**Definition 1.** Neka je  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^3$  skalarno polje. Gradijent skalarnog polja  $f$ , u oznaci  $\text{grad}f$ , je vektorsko polje koje definiramo na sljedeći način

$$\text{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}.$$

**Definition 2.** Hamiltonov diferencijalni operator (nabla) glasi

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Diferencijalni operator  $\nabla$  istovremeno ima svojstva i vektora i derivacije. Vrijedi  $\text{grad}f = \nabla f$ . Gradijent možemo smatrati retčanom matricom,  $\text{grad}f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$ .

Gradijent označava smjer najbržeg rasta funkcije  $f$  u točki  $T_0(x_0, y_0, z_0)$ . Iznos tog rasta je  $|\text{grad}f(T_0)|$ . Primjerice, ako skalarno polje  $f$  opisuje temperaturu u proizvoljnoj točki prostora, onda će gradijent od  $f$  u točki  $T(x, y, z)$  pokazivati u smjeru u kojem temperatura najbrže raste.

## 3 Jakobijan

U literaturi, termin Jakobijan<sup>1</sup> se koristi naizmjenično za Jacobijevu matricu i determinantu. I matrica i determinanta imaju korisnu i važnu primjenu: matrica sadrži parcijalne derivacije prvog reda, a determinanta je korisna u procesu promjene varijabla u integralnom računu.

Neka je  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  vektorsko polje. Jakobijan možemo smatrati generalizacijom derivacije na vektorska polja. Potrebna nam je brzina promjene svake komponente funkcije  $F$  za ulaznu varijablu  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , a upravo to je uhvaćeno u matrici koju nazivamo Jacobijeva matrica  $J$ .

Dakle,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Jakobijan je determinanta Jacobijeve (kvadratne) matrice. U slučaju kada je  $m = 1$  i  $n = 3$  Jacobijeva matrica je isto što i gradijent (retčana matrica). Jedna od važnih primjena Jacobijeve matrice, odnosno njene determinante je u računanju dvostrukih integrala, kad nam je potrebna zamjena varijabli kojom transformiramo originalnu funkciju u neku mnogo jednostavniju koju ćemo lakše integrirati. Primjerice, često pri računanju koristimo vezu između u kartezijevih i polarnih koordinata:  $x(r, \varphi) = r \cos \varphi$ ,  $y(r, \varphi) = r \sin \varphi$ . Općenito, pojam Jakobijana za funkcije  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  definiramo jednakošću

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Dakle, Jakobijan za promjenu koordinata u polarne je jednak

$$\det J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Formula za prijelaz iz kartezijevih u polarne koordinate u dvostrukom integralu glasi

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) |\det J| dr d\varphi = \iint_{D'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

**Example 3.** Izračunati površinu lika  $D$  u  $xy$  ravnini omeđ enog kružnicama  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 4$  i pravcima  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ,  $y = x$  za  $x \geq 0$ .

Kako je područje integracije omeđ eno kružnicama prikladno je prijeći u polarne koordinate. Jakobijan je tada jednak  $\det J = r$ .

Rubne krivulje i pravci područja  $D$  u polarnim koordinatama imaju jednađbe  $r_1 = 1$ ,  $r_2 = 2$ ,  $\tan \varphi_1 = 1$ ,  $\tan \varphi_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Tim jednađbama je određ eno područje  $D'$  u  $r\varphi$  ravnini. Područje  $D$  je slika područja  $D'$  u odnosu na zadanu transformaciju. Računamo:

$$\begin{aligned} P &= \iint_D dx dy = \iint_{D'} r dr d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_1^2 r dr \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left. \frac{r^2}{2} \right|_1^2 d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left( 2 - \frac{1}{2} \right) d\varphi = \left. \frac{3}{2} \varphi \right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Apsolutna vrijednost Jakobijana  $|\det J|$  u slučaju kada je  $\det J \neq 0$  je faktor kojim množimo površinu pravokutnika da bismo dobili površinu krivocrtnog lika. Jakobijan djeluje kao faktor skaliranja izmeđ u dva koordinatna sustava.

## 4 Hessijan

Vidjeli smo da je gradijent retčana matrica koja sadrži prve derivacije funkcije više varijabli. Hesseova<sup>2</sup> matrica je matrica parcijalnih derivacija drugog reda funkcije više varijabli.

**Definition 4.** Hesseova matrica je kvadratna matrica dimenzija  $n \times n$  parcijalnih derivacija drugog reda funkcije  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tj. funkcije koja  $n$ -dimenzionalni vektor preslikava u skalar. Element Hesseove matrice definiran je s  $H_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ , a sama matrica ovako:

$$H = \nabla \nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Determinantu Hesseove matrice nazivamo Hessijan.

Zbog Schwarzovog teorema, za funkcije s neprekidnim parcijalnim derivacijama drugog reda, Hesseova matrica je simetrična. Također, uočimo vezu Hesseove matrice i Jacobijeve matrice. Vrijedi

$$H(f(x)) = J(\nabla f(x)),$$

tj. Hesseova matrica funkcije  $f$  je Jacobijeva matrica gradijenta funkcije  $f$ .

Najčešća primjena Hessijana je pri određivanju ekstrema funkcije više varijabli.

**Definition 5.** Za kvadratnu matricu  $A \in M_n$  njene glavne minore su determinante kvadratnih matrica  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = A$ , gdje je  $A_k$  matrica koja se iz  $A$  dobije tako da uzmemo njenih prvih  $k$  redaka i  $k$  stupaca, tj.  $A_i = [a_{ij}] \in M_k$ .

Funkcija  $f$  u stacionarnoj točki  $x_0$  ima lokalni minimum ako su sve minore Hesseove matrice  $H(f)(x_0)$  pozitivne, a lokalni maksimum ako predznaci minora Hesseove matrice  $H(f)(x_0)$  alterniraju počevši s negativnim.

Ukoliko su neke od minora nula, ali nema negativnih ili pak alterniraju tako da neparne po redu nisu pozitivne, a parne nisu negativne, potrebne su druge metode provjere. U preostalim slučajevima riječ je o sedlastoj točki, tj. stacionarnoj točki koja nije ekstrem.

**Example 6.** Odrediti lokalne ekstreme funkcije zadane formulom  $f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$ .

Gradijent funkcije  $f$  jednak je

$$\nabla f(x, y) = (4y - 4x^3)\vec{i} + (4x - 4y^3)\vec{j},$$

a Hesseova matrica

$$H(f)(x, y) = \begin{bmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{bmatrix}.$$

Stacionarne točke funkcije  $f$  su  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  i  $(-1, -1)$ .

Računamo:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 4$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0$ .

Sada je  $\det H(f)(0, 0) = -16$  pa je  $(0, 0)$  sedlasta točka.

Zatim:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = -12$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = 4$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = -12$ .

Vrijedi  $\det H(f)(1, 1) = 128$  pa je  $(1, 1)$  lokalni maksimum i vrijednost lokalnog maksimuma u  $(1, 1)$  iznosi  $f(1, 1) = 2$ .

I konačno:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, -1) = -12$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, -1) = 4$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, -1) = -12$

te je  $\det H(f)(-1, -1) = 128$  pa je i  $(-1, -1)$  lokalni maksimum i vrijednost lokalnog maksimuma u  $(-1, -1)$  opet iznosi  $f(-1, -1) = 2$ .

## 5 Wronskijan

Do sada smo upoznali Jacobijevu matricu i vidjeli njenu primjenu u rješavanju zadataka s dvostrukim integralima te Hesseovu matricu primijenjenu u računanju ekstrema funkcija više varijabli. U ovom poglavlju kratko ćemo opisati determinantu matrice Wronskog<sup>3</sup> koju nazivamo Wronskijan te pokazati njenu primjenu u rješavanju diferencijalnih jednadžbi drugog reda.

Iz linearne algebre znamo definiciju linearne nezavisnosti vektora.

**Definition 7.** Vektori  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  su linearno nezavisni ako za sve skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0.$$

U protivnom su vektori  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  linearno zavisni.

Slično želimo definirati i linearnu nezavisnost derivabilnih funkcija jedne varijable.

**Definition 8.** Dvije funkcije  $y_1$  i  $y_2$  su linearno nezavisne na intervalu  $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$  ako za skalare  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 0, k_2 = 0.$$

U protivnom su funkcije  $y_1, y_2$  linearno zavisne.

Iz definicije vidimo da kada je  $k_1 \neq 0$  ili  $k_2 \neq 0$  možemo dobiti

$$y_1 = -\frac{k_2}{k_1} y_2 \quad \text{ili} \quad y_2 = -\frac{k_1}{k_2} y_1,$$

odnosno  $y_1 = m y_2$  ili  $y_2 = n y_1$  ( $y_1$  i  $y_2$  su proporcionalne funkcije).

**Example 9.** Funkcije  $f(x) = 2 \sin^2 x$  i  $g(x) = 1 - \cos^2 x$  su linearno zavisne jer

$$(1)(2 \sin^2 x) + (-2)(1 - \cos^2 x) = 0.$$

Osim ovoga, postoji i sistematičniji način ispitivanja linearne nezavisnosti funkcija. O tome govori sljedeća definicija i teorem.



**Definition 10.** Neka su  $y_1, y_2 : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilne funkcije. Funkcija

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

je determinanta Wronskog ili Wronskijan funkcija  $y_1$  i  $y_2$ .

**Theorem 11.** Ako su funkcije  $y_1$  i  $y_2$  linearno zavisne na intervalu  $\mathcal{I}$ , onda je njihov Wronskijan identično jednak nula.<sup>4</sup>

**Example 12.** Pokazati da su funkcije  $f(x) = e^x$  i  $g(x) = xe^x$  linearno nezavisne.

Izračunajmo Wronskijan

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = (x+1)e^{2x} - xe^{2x} = e^{2x} \neq 0.$$

Kako Wronskijan nije nula, zaključujemo da su  $e^x$  i  $xe^x$  linearno nezavisne funkcije na svakom intervalu.

Vidjeli smo definiciju Wronskijana u slučaju  $n = 2$ . Za općeniti  $n$ , Wronskijan je determinanta

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Studenti matematičkih i tehničkih fakulteta Wronskijan najčešće susreću pri rješavanju homogenih linearnih diferencijalnih jednačbi (DJ) drugog (ili višeg) reda. Homogene linearne DJ drugog reda su DJ oblika  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ . Znamo da ako su  $y_1$  i  $y_2$  dva rješenja takve jednačbe, onda je i svaka njihova linearna kombinacija  $c_1y_1 + c_2y_2$  također rješenje te jednačbe. No ako su funkcije  $y_1$  i  $y_2$  linearno nezavisne funkcije na nekom intervalu  $\mathcal{I}$  onda je opće rješenje jednačbe dano s  $c_1y_1 + c_2y_2$ .

**Example 13.** Riješiti DJ  $y'' - y = 0$ ,  $y(0) = 4$ ,  $y'(0) = -2$ .

Funkcije  $y_1 = e^x$  i  $y_2 = e^{-x}$  su rješenja ove homogene linearne DJ drugog reda za sve  $x \in \mathbb{R}$ . Naime, direktnom provjerom za  $y_1 = e^x$  dobijemo  $(e^x)'' - e^x = e^x - e^x = 0$ , a slično i za  $y_2 = e^{-x}$ . Njihova linearna kombinacija  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$  je također rješenje DJ. Iz početnih uvjeta dobijemo:

$$y(0) = c_1 + c_2 = 4 \quad y'(0) = c_1 - c_2 = -2.$$

Rješenje ovog sustava je  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 3$ . Time smo dobili rješenje DJ koje glasi

$$y = e^x + 3e^{-x}$$

koje je ujedno i opće rješenje jer je

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & 3e^{-x} \\ e^x & -3e^{-x} \end{vmatrix} = -3 - 3 = -6 \neq 0.$$

Primjedba. Da smo umjesto  $e^x$  i  $e^{-x}$  uzeli funkcije  $y_1 = e^x$  i  $y_2 = ke^x$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , te stavili  $y = c_1 e^x + kc_2 e^x$  naše rješenje ne bi bilo opće jer su ovakvi  $y_1$  i  $y_2$  linearno zavisne funkcije (proporcionalne su).

## 6 Vandermondeova determinanta

Vandermondeova<sup>5</sup> determinanta je jedna od najpoznatijih eksplicitnih formula za neku determinantu u matematici. Retci Vandermondeove matrice su geometrijski nizovi. Neka su  $x_0, x_1, \dots, x_n$  realni brojevi,  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ . Matricu u oznaci  $V_n(x)$  definiranu na način

$$V_n(x) = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$$

nazivamo Vandermondeova matrica. Determinanta kvadratne matrice  $V_n(x)$  je Vandermondeova determinanta. Njena vrijednost je polinom

$$\det(V_n(x)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Jedna od primjena Vandermondeove determinante je u određivanju interpolacijskog polinoma  $p_n(x)$ ,  $n$ -tog stupnja koji će dovoljno dobro aproksimirati funkciju  $f$  za koju je poznato njeno djelovanje na konačnom skupu točaka, tj. znamo da je  $f(x_i) = y_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

**Example 14.** Odrediti interpolacijski polinom čiji graf prolazi točkama  $(1, 2)$ ,  $(5, 3)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(7, -1)$ .

Ako  $p_3(x)$  prikažemo u kanonskom obliku

$$p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3,$$

tada treba odrediti koeficijente  $a_0, a_1, a_2, a_3$  tako da vrijede uvjeti interpolacije

$$p_3(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

tj.

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + a_3 \cdot 1^3 &= 2 \\ a_0 + a_1 \cdot 5 + a_2 \cdot 5^2 + a_3 \cdot 5^3 &= 3 \\ a_0 + a_1 \cdot (-2) + a_2 \cdot (-2)^2 + a_3 \cdot (-2)^3 &= 0 \\ a_0 + a_1 \cdot 7 + a_2 \cdot 7^2 + a_3 \cdot 7^3 &= -1. \end{aligned}$$

U matričnom obliku sustav možemo zapisati:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 \\ 1 & -2 & (-2)^2 & (-2)^3 \\ 1 & 7 & 7^2 & 7^3 \end{bmatrix}}_V \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}}_{\vec{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\vec{y}}.$$

Cramerovim pravilom riješimo sustav,

$$a_i = \frac{D_i}{\det V}, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

gdje je  $\det V$  Vandermondeova determinanta, a  $D_i$  determinanta matrice koju dobijemo tako da se u matrici  $V$   $(i + 1)$ -vi stupac zamijeni vektorom  $\vec{y}$ . Odredimo Vandermondeovu determinantu

$$\det V = \prod_{1 \leq i < j \leq 3} (x_j - x_i) = (7 - 1)(7 - 5)(7 - (-2))(-2 - 1)(-2 - 5)(5 - 1) = 9072.$$

Odredimo vrijednosti determinanti  $D_i$ , te zapišemo rješenje sustava

$$a_0 = \frac{D_0}{\det V} = \frac{9996}{9072}, a_1 = \frac{D_1}{\det V} = \frac{7734}{9072}, a_2 = \frac{D_2}{\det V} = \frac{732}{9072}, a_3 = \frac{D_3}{\det V} = -\frac{318}{9072}.$$

Sada možemo zapisati interpolacijski polinom

$$p_3(x) = \frac{1}{9072} (9996 + 7734x + 732x^2 - 318x^3).$$

## 7 Cayley-Mengerova determinanta

Studentima vjerojatno manje poznata determinanta od prethodno opisanih je Cayley-Mengerova<sup>6</sup> determinanta koja se koristi u linearnoj algebri, geometriji i trigonometriji. Predstavlja formulu za sadržaj (duljinu/površinu/volumen)  $n$ -dimenzionalnog simpleksa izraženu preko kvadrata udaljenosti svih parova vrhova simpleksa. U geometriji, simpleks je najjednostavniji politop koji se može formirati, odnosno generalizacija pojma trokuta ili tetraedra na proizvoljne dimenzije. Na primjer 0-dimenzionalni simpleks je točka, 1-dimenzionalni simpleks je segment (dio pravca), 2-dimenzionalni simpleks je trokut, a 3-dimenzionalni tetraedar.

**Definition 15.** Neka su  $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$  vrhovi  $n$ -dimenzionalnog simpleksa u  $n$ -dimenzionalnom Euklidskom prostoru. Neka je  $d_{ij}$  euklidska udaljenost između vrhova  $A_i$  i  $A_j$ ,  $d_{ij} = \|A_i - A_j\|_2$ . Tada se  $n$ -dimenzionalni sadržaj simpleksa  $v_n$  može izračunati iz sljedeće formule:

$$v_n^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2 2^n} \begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & \cdots & d_{1(n+1)}^2 & 1 \\ d_{12}^2 & 0 & \cdots & d_{2(n+1)}^2 & 1 \\ d_{13}^2 & d_{23}^2 & \cdots & d_{3(n+1)}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ d_{1(n+1)}^2 & d_{2(n+1)}^2 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Determinanta u gornjoj definiciji je Cayley-Mengerova determinanta  $\Delta$ . Vezu između Cayley-Mengerove determinante i sadržaja  $n$ -dimenzionalnog simpleksa lakše uočavamo ako raspišemo determinantu za  $n = 1$ ,  $n = 2$  i  $n = 3$ .

Kako smo već napisali 1-dimenzionalni simpleks je dio pravca između dvije točke  $A_1$  i  $A_2$ . Tada je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & 1 \\ d_{12}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2d_{12}^2 = 2v_1^2,$$

odnosno Cayley-Mengerova determinanta  $\Delta$  je jednaka dvostrukom kvadratu udaljenosti između dviju točaka.

Ako za  $n = 2$  označimo  $d_{12} = a$ ,  $d_{13} = b$  i  $d_{23} = c$  onda je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a^4 - 2a^2b^2 + b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4.$$

Stavimo li  $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$  vrijedi

$$\Delta = -16s(s - a)(s - b)(s - c).$$

Iz Heronove formule znamo da je površina trokuta sa stranicama  $a$ ,  $b$  i  $c$  jednaka  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ .

Dakle, za  $n = 2$  Cayley-Mengerova determinanta je proporcionalna kvadratu površine trokuta;  $\Delta = -16v_2^2$ . Za  $n = 3$  sadržaj 3-simpleksa (tj. volumen tetraedra) je dan s

$$v_3^2 = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 & 1 \\ d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 & 1 \\ d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 & 1 \\ d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

U ovom radu smo opisali matrice i determinante s kojima se najčešće susreću studenti prve i druge godine i predavači matematike na fakultetima. Bez njih je teško i zamisliti bilo koje fakultetsko gradivo. Osim navedenih, brojne su druge zanimljive determinante kao što su Toeplitzova, Sylvesterova, Slaterova, Diudonneova, Hankelova, Pascalova, Cauchyjeva, ali one izlaze iz okvira ovog rada.

## Bibliografija

- [1] E. Kreyszig: *Advanced engineering mathematics*, 8th edition, 1999.
  - [2] T. Burić, L. Korkut, J.P. Milišić, M. Pašić, I. Velčić: *Vektorska analiza*, Element, Zagreb, 2014.
  - [3] I. Brnetić, V. Županović: *Višestruki integrali*, Element, Zagreb, 2014.
  - [4] <https://math.libretexts.org/Bookshelves/Analysis/Supplemental>
  - [5] <http://www.mathematics.digital/matematika1/index.html>
  - [6] <http://lavica.fesb.unist.hr/matematika2/>
  - [7] <https://najeebkhan.github.io/blog/VecCal.html>
  - [8] S. Kurepa: *Matematička analiza III*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1975.
  - [9] [https://www.pmf.unizg.hr/\\_download/repository/mat2-pred9-novo.pdf](https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/mat2-pred9-novo.pdf)
  - [10] [https://en.wikipedia.org/wiki/Cayley-Menger\\_determinant](https://en.wikipedia.org/wiki/Cayley-Menger_determinant)
-

<sup>1</sup>Carl Gustav Jacobi (1804-1851), njemački matematičar

<sup>2</sup>Ludwig Otto Hesse (1811-1874), njemački matematičar

<sup>3</sup>Jozef Maria Hoene-Wronski (1776-1853), poljski matematičar, filozof, fizičar i izumitelj

<sup>4</sup>Obrat nije nužno istinit, tj. postoje linearno nezavisne funkcije čiji je Wronskijan identički jednak nula. Obrat vrijedi kada su  $y_i$  rješenja linearne diferencijalne jednačbe  $n$ -tog reda.

<sup>5</sup>Alexandre-Theophile Vandermonde (1735-1796), francuski matematičar, glazbenik i kemičar

<sup>6</sup>Arthur Cayley (1821-1895), britanski matematičar, Karl Menger (1902-1985), austrijsko-američki matematičar



ISSN 1334-6083

© 2023 **HMD**