

# Sturm-Liouvilleov problem

---

Čatipović, Marija; Krešić-Jurić, Saša

Source / Izvornik: **Acta mathematica Spalatensia. Series didactica, 2021, 4, 97 - 111**

**Journal article, Published version**

**Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)**

<https://doi.org/10.32817/amssd.4.4.7>

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:179:107225>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-27**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Electrical Engineering,  
Mechanical Engineering and Naval Architecture -  
University of Split](#)



UNIVERSITY OF SPLIT

DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

# Sturm-Liouvilleov problem

Marija Čatipović, Saša Krešić-Jurić

---

## Sažetak

Klasična Sturm-Liouvilleova jednačba, nazvana po Jacquesu Sturm i Josephu Liouvilleu, obična je diferencijalna jednačba drugog reda oblika

$$\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = -\lambda w(x)u. \quad (1)$$

Vrijednost  $\lambda$  nije određena i pronalaženje te vrijednosti za koju postoje netrivialna rješenja jednačbe (1) i koja zadovoljavaju rubne uvjete dio je problema koji nazivamo Sturm-Liouvilleov problem. Pokazat ćemo da se proizvoljni linearni operator drugog reda može transformirati u Sturm-Liouvilleov operator tj. da je Sturm-Liouvilleov operator kanonski oblik diferencijalnog operatora drugog reda. Vlastite vrijednosti regularnog Sturm-Liouvilleovog problema su realne, prebrojive i tvore strogo rastući niz  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$  tako da vrijedi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ . Također, za svaku vlastitu vrijednost  $\lambda_n$  postoji odgovarajuća vlastita funkcija  $u_n(x)$  jedinstveno određena do na multiplikativnu konstantu koja ima točno  $n$  nultočaka u intervalu  $[a, b]$ . Ovo je jedan od fundamentalnih rezultata za Sturm-Liouvilleove operatore.

*Ključni pojmovi:* Sturm-Liouvilleov problem, vlastite vrijednosti, vlastite funkcije, regularni

---

## 1. Vrste Sturm-Liouvilleovog problema

Promotrimo diferencijalnu jednačbu oblika

$$Lu + \lambda w(x)u = 0 \quad (2)$$

gdje je  $L$  diferencijalni operator definiran sa

$$Lu = \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u. \quad (3)$$

Diferencijalni operator  $L$  nazivamo Sturm-Liouvilleov operator. Diferencijalne jednačbe oblika (2) javljaju se kod rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednačbi matematičke fizike metodom separacije varijabli. Ako je  $\hat{L}$  proizvoljni diferencijalni operator drugog reda

$$\hat{L}u = a_2(x) \frac{d^2u}{dx^2} + a_1(x) \frac{du}{dx} + a_0(x)u, \quad a_2(x) \neq 0, \forall x \in [a, b],$$

tada se  $\hat{L}$  može transformirati u Sturm-Liouvilleov operator množenjem sa funkcijom

$$s(x) = \frac{1}{a_2(x)} \exp \left( \int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx \right).$$

Doista, uočavamo da vrijedi

$$(s(x)\hat{L})u = \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u$$

gdje je

$$p(x) = \exp \left( \int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx \right), \quad q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)} \exp \left( \int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx \right).$$

Iz ovoga proizlazi da je Sturm-Liouvilleov operator kanonski oblik diferencijalnog operatora drugog reda.

**Definicija 1.** *Regularni Sturm-Liouvilleov problem sastoji se od diferencijalne jednačbe*

$$Lu + \lambda w(x)u = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (4)$$

gdje je  $L$  operator oblika (3) i rubnih uvjeta

$$a_1u(a) + a_2u'(a) = 0, \quad (5)$$

$$b_1u(b) + b_2u'(b) = 0. \quad (6)$$

gdje je  $a_1^2 + a_2^2 > 0$  i  $b_1^2 + b_2^2 > 0$ . Funkcije  $p$ ,  $p'$ ,  $q$  i  $w$  su neprekidne na  $[a, b]$  i  $p(x) > 0$ ,  $w(x) > 0 \forall x \in [a, b]$ .

Kada je Sturm-Liouvilleov problem definiran na otvorenom ili poluotvorenom intervalu, ili ako  $p(x)$  ili  $w(x)$  iščezavaju u jednoj ili obje rubne točke intervala  $[a, b]$ , ili ako  $p(x)$  ili  $w(x)$  u rubnoj točki konvergiraju ka beskonačnosti, tada se on naziva singularni Sturm-Liouvilleov problem.

Također, Sturm-Liouvilleov problem je singularan ako je definiran na beskonačnom intervalu [3, 4, 5].

**Definicija 2.** U Sturm-Liouvilleovom problemu domena operatora  $L$ , koju označavamo sa  $D(L)$ , prostor je svih kompleksnih funkcija  $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  za koje vrijedi  $u'' \in L^2([a, b])$ . Tada imamo  $L: D(L) \rightarrow L^2([a, b])$ .

Za funkciju  $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  kažemo da je kvadratno integrabilna ako je  $\int_a^b |u(x)|^2 dx$  konačan. Prostor svih takvih funkcija označavamo sa  $L^2([a, b])$  i zovemo Lebesgueovim prostorom kvadratno integrabilnih funkcija  $[1, 2]$ .

Još jedan tip problema koji se često javlja u primjenama jest periodični Sturm-Liouvilleov problem. Sturm-Liouvilleova jednadžba

$$Lu + \lambda w(x)u = 0, \quad a \leq x \leq b,$$

gdje je  $p(a) = p(b)$ , zajedno s periodičnim rubnim uvjetima  $u(a) = u(b)$ ,  $u'(a) = u'(b)$  naziva se periodični Sturm-Liouvilleov problem.

## 2. Vlastite vrijednosti i vlastite funkcije Sturm-Liouvilleovog problema

**Definicija 3.** Funkcija  $u$  koja zadovoljava jednadžbu

$$Lu + \lambda w(x)u = 0$$

naziva se vlastita funkcija s pripadnom vlastitom vrijednošću  $\lambda$  [6].

Vlastite vrijednosti  $\lambda$  ovise o obliku operatora  $L$  i o rubnim uvjetima koje zadovoljava funkcija  $u$ , kako ilustriraju sljedeći primjeri.

**Primjer 4.** Promotrimo diferencijalnu jednadžbu

$$u'' + \lambda u = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \tag{7}$$

s rubnim uvjetima  $u(0) = u(\pi) = 0$ .

Uočavamo da je ovo regularni Sturm-Liouvilleov problem gdje je  $p(x) = w(x) = 1$ ,  $q(x) = 0$ . Promotrimo sve moguće slučajeve u ovisnosti o vrijednosti  $\lambda$ .

Ako je  $\lambda < 0$ , tada je opće rješenje jednadžbe (7) dano sa

$$u(x) = Ae^{\sqrt{|\lambda|x}} + Be^{-\sqrt{|\lambda|x}}.$$

Rubni uvjeti su zadovoljeni ako i samo ako je

$$u(0) = A + B = 0 \tag{8}$$

$$u(\pi) = Ae^{\sqrt{|\lambda|\pi}} + Be^{-\sqrt{|\lambda|\pi}} = 0. \tag{9}$$

Kako je determinanta matrice sustava (8)–(9)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{|\lambda|\pi}} & e^{-\sqrt{|\lambda|\pi}} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{|\lambda|\pi}} - e^{\sqrt{|\lambda|\pi}} \neq 0,$$

sustav (8)–(9) ima samo trivijalno rješenje  $A = B = 0$ . Dakle, sustav nema netrivialnih rješenja za  $\lambda < 0$  pa sustav nema vlastite vrijednosti za  $\lambda < 0$ . Ako je  $\lambda = 0$ , tada je opće rješenje jednadžbe (7) dano sa

$$u(x) = A + Bx.$$

Iz rubnih uvjeta

$$\begin{aligned} u(0) &= A = 0, \\ u(\pi) &= A + B\pi = 0, \end{aligned}$$

slijedi da je  $A = B = 0$ . Dakle,  $\lambda = 0$  također nije vlastita vrijednost sustava. Neka je sada  $\lambda > 0$ . Tada je opće rješenje jednadžbe (7) dano sa

$$u(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

pa rubni uvjeti impliciraju

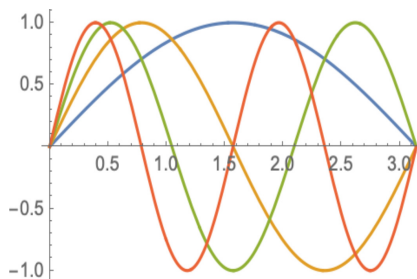
$$\begin{aligned} u(0) &= A \cdot 1 + 0 = A = 0, \\ u(\pi) &= A \cos(\sqrt{\lambda}\pi) + B \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0. \end{aligned}$$

Ovaj sustav ima netrivialna rješenja ako je

$$\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0,$$

odnosno  $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$ , za  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Dakle, vlastite su vrijednosti dane sa

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



Slika 1. Vlastite funkcije  $u_n(x) = \sin(nx)$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ .

a pripadne vlastite funkcije (do na multiplikativnu konstantu) su

$$u_n(x) = \sin(nx).$$

Uočimo da  $\lambda_n \rightarrow \infty$  kada  $n \rightarrow \infty$ ; što je tipično za vlastite vrijednosti Sturm-Liouvilleovog problema.

**Primjer 5.** *Promotrimo Eulerovu jednadžbu*

$$x^2 u'' + x u' + \lambda u = 0, \quad 1 \leq x \leq e,$$

s rubnim uvjetima

$$u(1) = 0, \quad u(e) = 0.$$

Eulerova jednadžba se može napisati u Sturm-Liouvilleovom obliku

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{du}{dx} \right) + \frac{1}{x} \lambda u = 0$$

gdje je  $w(x) = \frac{1}{x}$ ,  $p(x) = x$ , a  $q(x) = 0$ . Rješenje ove jednadžbe dano je sa

$$u(x) = c_1 x^{i\sqrt{\lambda}} + c_2 x^{-i\sqrt{\lambda}},$$

gdje je  $x^{ia} = e^{ia \ln x} = \cos(a \ln x) + i \sin(a \ln x)$ . Stoga rješenje  $u(x)$  prelazi u oblik

$$u(x) = A \cos(\sqrt{\lambda} \ln x) + B \sin(\sqrt{\lambda} \ln x),$$

gdje su  $A$  i  $B$  konstante vezane uz  $c_1$  i  $c_2$ . Rubni uvjeti impliciraju sljedeće:

$$u(1) = A \cos(\sqrt{\lambda} \ln 1) + B \sin(\sqrt{\lambda} \ln 1) = A = 0,$$

$$u(e) = A \cos(\sqrt{\lambda} \ln e) + B \sin(\sqrt{\lambda} \ln e) = A \cos(\sqrt{\lambda}) + B \sin(\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Ovaj sustav ima netrivialna rješenja ako je  $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$ ,  $B \neq 0$ , odnosno  $\sqrt{\lambda} = n\pi$ , za  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Dakle, vlastite vrijednosti dane su sa

$$\lambda_n = n^2 \pi^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

a pripadne vlastite funkcije su

$$u_n(x) = \sin(n\pi \ln x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**Primjer 6.** *Odredimo vlastite vrijednosti i vlastite funkcije periodičnog Sturm-Liouvilleovog problema*

$$u'' + \lambda u = 0, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

s periodičnim rubnim uvjetima

$$u(-\pi) = u(\pi), \quad u'(-\pi) = u'(\pi).$$

Uočavamo da je  $p(x) = 1$ , pa je uvjet  $p(-\pi) = p(\pi)$  ispunjen. Kada je  $\lambda > 0$ , opće rješenje Sturm-Liouvilleove jednadžbe dano je sa

$$u(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Iz periodičnog rubnog uvjeta  $u(-\pi) = u(\pi)$  dobivamo sljedeću jednakost

$$2B \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0.$$

Budući da je

$$u'(x) = -A\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) + B\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x),$$

uvjet  $u'(-\pi) = u'(\pi)$  implicira

$$2A\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0.$$

Dakle, ako vrijedi

$$\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0,$$

tada netrivialna rješenja postoje, a vlastite vrijednosti dane su sa

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Kako je jednadžba  $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$  zadovoljena za proizvoljne  $A$  i  $B$ , dobivamo dvije linearno nezavisne vlastite funkcije

$$u_n(x) = \cos(nx) \text{ i } u_n(x) = \sin(nx)$$

koje odgovaraju istoj vlastitoj vrijednosti  $\lambda_n = n^2$  za svaki  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Slično kao u primjeru 4 uočavamo da za  $\lambda < 0$  rješenje Sturm-Liouvilleove jednadžbe ne zadovoljava periodične rubne uvjete. Ako je  $\lambda = 0$ , tada rješenje jednadžbe

$$u(x) = A + Bx$$

zadovoljava rubne uvjete ako je

$$2B\pi = 0,$$

odnosno  $B = 0$ . Stoga je  $\lambda = 0$  vlastita vrijednost sa pripadnim rješenjem  $u_0(x) = 1$ . Dakle, vlastite vrijednosti ovog problema su

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

a pripadne vlastite funkcije su dane sa

$$1, \cos(nx), \sin(nx), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

### 3. Svojstva vlastitih vrijednosti i vlastitih funkcija Sturm-Liouvilleovog problema

Promotrimo sada neka važna svojstva Sturm-Liouvilleovog problema.

**Teorem 7** (Lagrangeov identitet). *Neka su  $u$  i  $v$  funkcije u domeni Sturm-Liouvilleovog operatora  $L$ . Tada vrijedi [3]*

$$uLv - vLu = \frac{d}{dx} \left( p(uv' - vu') \right).$$

*Dokaz.* Koristeći definiciju (3) Sturm-Liouvilleovog operatora imamo:

$$\begin{aligned} uLv - vLu &= u \frac{d}{dx} \left( p \frac{dv}{dx} \right) + quv - v \frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) - quv \\ &= u \frac{d}{dx} \left( p \frac{dv}{dx} \right) - v \frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) \\ &= p'(uv' - vu') + p(uv'' - vu'') \\ &= \frac{d}{dx} \left( p(uv' - vu') \right). \end{aligned}$$

□

**Teorem 8** (Abelova formula). *Ako su  $u$  i  $v$  dva rješenja jednadžbe*

$$Lu + \lambda w(x)u = 0, \quad a \leq x \leq b,$$

*tada je  $p(x)W(x; u, v)$  konstanta, gdje je*

$$W(x; u, v) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$$

*Wronskijan funkcija  $u$  i  $v$  [3].*

*Dokaz.* Prema pretpostavci  $u$  i  $v$  su rješenja jednadžbe  $Lu + \lambda w(x)u = 0$ , pa imamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (pu') + (q + \lambda w(x))u &= 0 \\ \frac{d}{dx} (pv') + (q + \lambda w(x))v &= 0. \end{aligned}$$

Množeći prvu jednadžbu s  $v$ , a drugu s  $u$ , oduzimanjem dobivamo

$$v \frac{d}{dx} (pu') - u \frac{d}{dx} (pv') = 0. \quad (10)$$

Parcijalnom integracijom jednakosti (10) imamo



$$\begin{aligned}
 & \int_a^x v \frac{d}{dt}(pu') dt - \int_a^x u \frac{d}{dt}(pv') dt \\
 &= v(t)p(t)u'(t) \Big|_a^x - \int_a^x pv'u' dt - u(t)p(t)v'(t) \Big|_a^x + \int_a^x pu'v' dt \\
 &= p(x)(u'(x)v(x) - u(x)v'(x)) - p(a)(u'(a)v(a) - u(a)v'(a)) \\
 &= p(x)W(x; u, v) - p(a)(u'(a)v(a) - u(a)v'(a)) = 0.
 \end{aligned}$$

Iz toga slijedi da je  $p(x)W(x; u, v)$  konstanta. □

Vlastitoj vrijednosti Sturm-Liouvilleovog problema može pripadati jedna ili više vlastitih funkcija. U primjeru 6 vlastita vrijednost  $\lambda_0 = 0$  ima jednu vlastitu funkciju  $u_0(x) = 1$ , dok svakoj vlastitoj vrijednosti  $\lambda_n = n^2, n \geq 1$ , pripadaju dvije vlastite funkcije  $u_n(x) = \cos(nx)$  i  $u_n(x) = \sin(nx)$ .

**Definicija 9.** *Maksimalni broj linearno nezavisnih funkcija koje pripadaju istoj vlastitoj vrijednosti naziva se multiplicitet vlastite vrijednosti [1].*

**Teorem 10.** *Vlastite funkcije regularnog Sturm-Liouvilleovog problema jedinstvene su do na multiplikativnu konstantu [3].*

*Dokaz.* Neka su  $u$  i  $v$  rješenja regularnog Sturm-Liouvilleovog problema

$$Lu + \lambda w(x)u = 0, \quad a \leq x \leq b.$$

Rubni uvjeti za funkcije  $u$  i  $v$  u točki  $x = a$  daju

$$a_1u(a) + a_2u'(a) = 0, \tag{11}$$

$$a_1v(a) + a_2v'(a) = 0. \tag{12}$$

Barem jedan od koeficijenata  $a_1$  i  $a_2$  različit je od nule jer je po pretpostavci  $a_1^2 + a_2^2 > 0$ , a to implicira da sustav (11)–(12) ima netrivialna rješenja za  $a_1$  i  $a_2$ . Uočavamo da tada vrijedi

$$W(a; u, v) = \begin{vmatrix} u(a) & v(a) \\ u'(a) & v'(a) \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Prema Abelovoj formuli je

$$p(x)W(x; u, v) = c, \quad a \leq x \leq b \tag{14}$$

za neki  $c \in \mathbb{R}$ . Kada je  $x = a$  imamo

$$p(a)W(a; u, v) = c,$$

pa jednakost (13) implicira da je  $c = 0$  jer je  $p(a) > 0$ . S obzirom da je Sturm-Liouvilleov problem regularan pa vrijedi  $p(x) > 0$  za svaki  $x \in [a, b]$ , iz jednakosti (14) slijedi

$$W(x; u, v) = 0$$

za svaki  $x \in [a, b]$ . Ovo implicira da su funkcije  $u$  i  $v$  linearno zavisne, tj. da vrijedi  $u = \alpha v$  za neki  $\alpha \in \mathbb{C}$ .  $\square$

Iz prethodnog teorema slijedi da vlastite vrijednosti regularnog Sturm-Liouvilleovog problema imaju multiplicitet jedan [3].

Ova tvrdnja je vidljiva u primjerima 4 i 5. Ona ne vrijedi za periodični Sturm-Liouvilleov problem što se vidi iz primjera 6.

**Definicija 11.** *Skalarni umnožak na prostoru  $L^2([a, b])$  s težinskom funkcijom  $w$ ,  $w(x) > 0$  za sve  $x \in [a, b]$  definiran je sa [1]*

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} w(x) dx.$$

Ako je  $w(x) = 1$ , za svaki  $x \in [a, b]$ , tada pišemo

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (15)$$

**Teorem 12.** *Neka su  $u$  i  $v$  funkcije u domeni Sturm-Liouvilleovog operatora  $L$  koje zadovoljavaju rubne uvjete*

$$a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0, \quad b_1 u(b) + b_2 u'(b) = 0, \quad (16)$$

$$a_1 v(a) + a_2 v'(a) = 0, \quad b_1 v(b) + b_2 v'(b) = 0, \quad (17)$$

gdje je  $a_1^2 + a_2^2 > 0$ ,  $b_1^2 + b_2^2 > 0$ . Tada je [3]

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle.$$

*Dokaz.* Ako funkcija  $v$  zadovoljava rubni uvjet (17), tada konjugirana funkcija  $\bar{v}$  zadovoljava uvjete

$$a_1 \bar{v}(a) + a_2 \bar{v}'(a) = 0, \quad (18)$$

$$b_1 \bar{v}(b) + b_2 \bar{v}'(b) = 0, \quad (19)$$

jer su  $a_i$  i  $b_i$  realni koeficijenti za  $i = 1, 2$ . Integracijom Lagrangeovog identiteta za funkcije  $u$  i  $\bar{v}$  dobivamo

$$\begin{aligned} \int_a^b (uL\bar{v} - \bar{v}Lu) dx &= p(x) \left( u(x)\bar{v}'(x) - \bar{v}(x)u'(x) \right) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= p(b) \left( u(b)\bar{v}'(b) - \bar{v}(b)u'(b) \right) - p(a) \left( u(a)\bar{v}'(a) - \bar{v}(a)u'(a) \right). \end{aligned}$$

Prema uvjetima (16) i (18) funkcije  $u$  i  $\bar{v}$  zadovoljavaju

$$a_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0, \tag{20}$$

$$a_1 \bar{v}(a) + a_2 \bar{v}'(a) = 0. \tag{21}$$

Sustav (20)–(21) ima netrivialna rješenja za  $a_1$  i  $a_2$  jer je barem jedan od koeficijenata  $a_1$  i  $a_2$  različit od nule, što implicira da je determinanta matrice sustava (20)–(21) jednaka

$$W(a; u, \bar{v}) = \begin{vmatrix} u(a) & \bar{v}(a) \\ u'(a) & \bar{v}'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Slično se pokazuje  $W(b; u, \bar{v}) = 0$ . Stoga slijedi

$$\int_a^b (uL\bar{v} - \bar{v}Lu) dx = 0. \tag{22}$$

Koeficijenti u operatoru  $L$  realne su funkcije pa vrijedi  $L\bar{v} = \overline{Lv}$ , stoga jednakost (22) možemo pisati u obliku

$$\int_a^b u\overline{Lv} dx = \int_a^b (Lu)\bar{v} dx,$$

odnosno

$$\langle u, Lv \rangle = \langle Lu, v \rangle.$$

□

Iz navedenog slijedi da je Sturm-Liouvilleov operator  $L$  hermitski operator jer vrijedi

$$\langle u, Lv \rangle = \langle Lu, v \rangle, \quad \forall u, v \in D(L).$$

**Teorem 13.** *Vlastite vrijednosti regularnog Sturm-Liouvilleovog problema su realne [3].*

*Dokaz.* Neka je  $\lambda$  vlastita vrijednost Sturm-Liouvilleovog problema i neka je  $u$  pripadna vlastita funkcija. Tada je  $u \neq 0$  i

$$Lu = -\lambda w(x)u, \quad a \leq x \leq b.$$

Kako je operator Sturm-Liouvilleovog problema hermitski imamo

$$\langle Lu, u \rangle - \langle u, Lu \rangle = 0,$$

odnosno

$$\langle -\lambda wu, u \rangle - \langle u, -\lambda wu \rangle = 0.$$

Oдавде slijedi

$$\lambda \langle wu, u \rangle - \bar{\lambda} \langle u, wu \rangle = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b |u(x)|^2 w(x) dx = 0. \quad (23)$$

Kako je

$$\int_a^b |u(x)|^2 w(x) dx > 0$$

jer je  $w(x) > 0$  za sve  $x \in [a, b]$ , jednakost (23) implicira  $\lambda - \bar{\lambda} = 0$ , odnosno  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Iz navedenih se primjera vidi da vlastite vrijednosti  $\lambda_n$  Sturm-Liouvilleovog problema tvore rastući niz i  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ . Ovo zapažanje vrijedi općenito i dano je sljedećim teoremom.

**Teorem 14.** *Regularni Sturm-Liouvilleov problem ima beskonačan niz realnih vlastitih vrijednosti*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

takav da vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty. \quad (24)$$

Za svaku vrijednost  $\lambda_n$  odgovarajuća vlastita funkcija  $u_n(x)$  jedinstveno je određena do na konstantu i ima točno  $n$  nultočaka u intervalu  $[a, b]$  [3].

Umjesto dokaza, ilustrirajmo ovaj teorem sljedećim primjerom.

**Primjer 15.** *Promotrimo Sturm-Liouvilleov problem*

$$\begin{aligned} u'' + \lambda u &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0) &= 0, \quad u(1) + hu'(1) = 0, \quad \text{gdje je } h > 0. \end{aligned}$$

Uočavamo da je  $p(x) = 1$ ,  $q(x) = 0$ ,  $w(x) = 1$ . Rješenje ovog problema dano je sa

$$u(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Rubni uvjet  $u(0) = 0$  daje  $A = 0$  pa imamo

$$u(x) = B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Iz uvjeta  $u(1) + hu'(1) = 0$  slijedi

$$B(\sin \sqrt{\lambda} + h\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}) = 0.$$

Kako tražimo netrivialna rješenja ( $B \neq 0$ ), iz prethodne jednačbe dobivamo

$$\tan \sqrt{\lambda} = -h\sqrt{\lambda}.$$

Ako definiramo  $\alpha = \sqrt{\lambda}$ , tada je

$$\tan \alpha = -h\alpha.$$

Ovo je transcendentalna jednačba čija se rješenja mogu prikazati grafički pomoću presjeka grafova funkcija  $\xi = \tan \alpha$  i  $\xi = -h\alpha$ , kao na slici 2. Uočavamo da postoji beskonačno mnogo rješenja  $\alpha_n$  za  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Svako rješenje  $\alpha_n$  daje odgovarajuću vlastitu vrijednost

$$\lambda_n = \alpha_n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Prema tome, postoji uređeni niz vlastitih vrijednosti

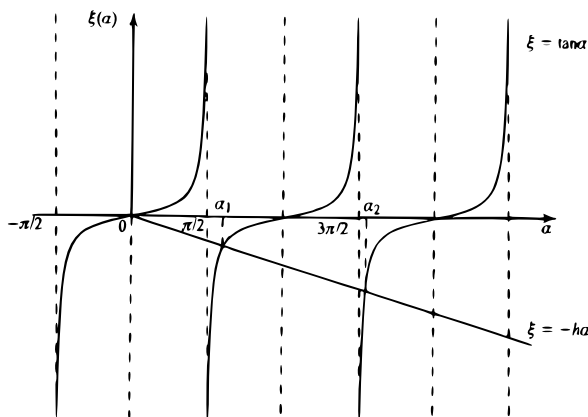
$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

takav da vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

Pripadna vlastita funkcija dana je sa

$$u_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}x).$$



Slika 2. Presjeci grafova funkcija  $\xi = \tan \alpha$  i  $\xi = -h\alpha$ .

**Teorem 16.** *Vlastite funkcije koje pripadaju različitim vlastitim vrijednostima regularnog Sturm-Liouvilleovog operatora su ortogonalne u odnosu na skalarni umnožak  $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$  s težinskom funkcijom  $w$  [4].*

*Dokaz.* Neka su  $u$  i  $v$  vlastite funkcije regularnog Sturm-Liouvilleovog operatora  $L$  koje pripadaju vlastitim vrijednostima  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Tada je

$$Lu = -\lambda_1 wu, \quad (25)$$

$$Lv = -\lambda_2 wv, \quad (26)$$

Također vrijedi

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle \quad (27)$$

jer je  $L$  hermitski operator. Supstitucijom jednakosti (25) i (26) u jednakost (27) dobivamo

$$\langle \lambda_1 wu, v \rangle = \langle u, \lambda_2 wv \rangle,$$

odnosno, uzimajući u obzir da je  $w$  realna funkcija i  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , imamo

$$\lambda_1 \int_a^b w(x)u(x)\overline{v(x)} dx = \lambda_2 \int_a^b u(x)w(x)\overline{v(x)} dx.$$

Iz toga slijedi

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b u(x)\overline{v(x)}w(x) dx = 0.$$

Kako je  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , zaključujemo da je

$$\langle u, v \rangle_w = \int_a^b u(x)\overline{v(x)}w(x) dx = 0. \quad (28)$$

Dakle,  $u$  i  $v$  su ortogonalne s obzirom na skalarni umnožak (28) s težinskom funkcijom  $w$ .  $\square$

**Primjer 17.** Legendreova jednadžba

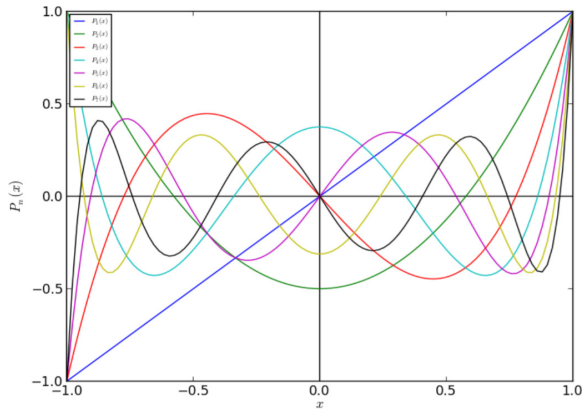
$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{du}{dx} \right) + \lambda u = 0, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

s uvjetima da  $u$  i  $u'$  imaju konačan limes kada  $x \rightarrow \pm 1$  singularni je Sturm-Liouvilleov problem.

U ovom problemu je  $p(x) = 1 - x^2$ ,  $q(x) = 0$ ,  $w(x) = 1$  pri čemu  $p(x)$  iščezava za  $x = \pm 1$ . Legendreove funkcije (Legendreovi polinomi)

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left( (x^2 - 1)^n \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

su vlastite funkcije, a  $\lambda_n = n(n+1)$  su vlastite vrijednosti ovog Sturm-Liouvilleovog problema. Uočavamo da vlastitih vrijednosti ima beskonačno mnogo i da vrijedi  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ . Također, vlastite funkcije  $P_n(x)$  su ortogonalne u odnosu na skalarni produkt (15).



Slika 3. Legendreovi polinomi [7].

## Literatura

- [1] L. Debnath, P. Mikusinski, *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*, drugo izdanje, Academic Press, San Diego, 1999.
- [2] A. N. Kolomogorov, S. V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, drugo izdanje, Dover Publications, New York, 1970.
- [3] T. Myint-U, L. Debnath, *Linear Partial Differential Equations*, četvrto izdanje, Boston, 2007
- [4] Y. Pinchover, J. Rubinstein, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [5] Web link, <http://www.math.iitb.ac.in/~siva/ma41707/ode7.pdf>, Datum zadnjeg pristupa: 25.09.2020.
- [6] Web link, <http://www.macs.hw.ac.uk/~robertw/F13YT2/chap6.pdf>, Datum zadnjeg pristupa: 20.09.2020.
- [7] Web link, <http://mathworld.wolfram.com/LegendrePolynomial.html>, Datum zadnjeg pristupa: 25.09.2020.

Marija Čatipović  
 Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje,  
 Ruđera Boškovića 32, 21 000 Split, Hrvatska  
 E-mail adresa: mcatipov@fesb.hr

Saša Krešić-Jurić  
Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno matematički fakultet, Ruđera Boškovića  
33, 21 000 Split, Hrvatska  
*E-mail adresa:* skresic@pmfst.hr