

MATEMATIKA 3 Osnovni pojmovi i riješeni zadaci

Grgić, Ivana; Jakovčević Stor, Nevena; De Micheli Vitturi, Petra Marija; Čatipović, Marija

Educational content / Obrazovni sadržaj

Publication year / Godina izdavanja: **2023**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:179:804444>

Rights / Prava: [Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International/Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 4.0 međunarodna](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-09-10**



Repository / Repozitorij:

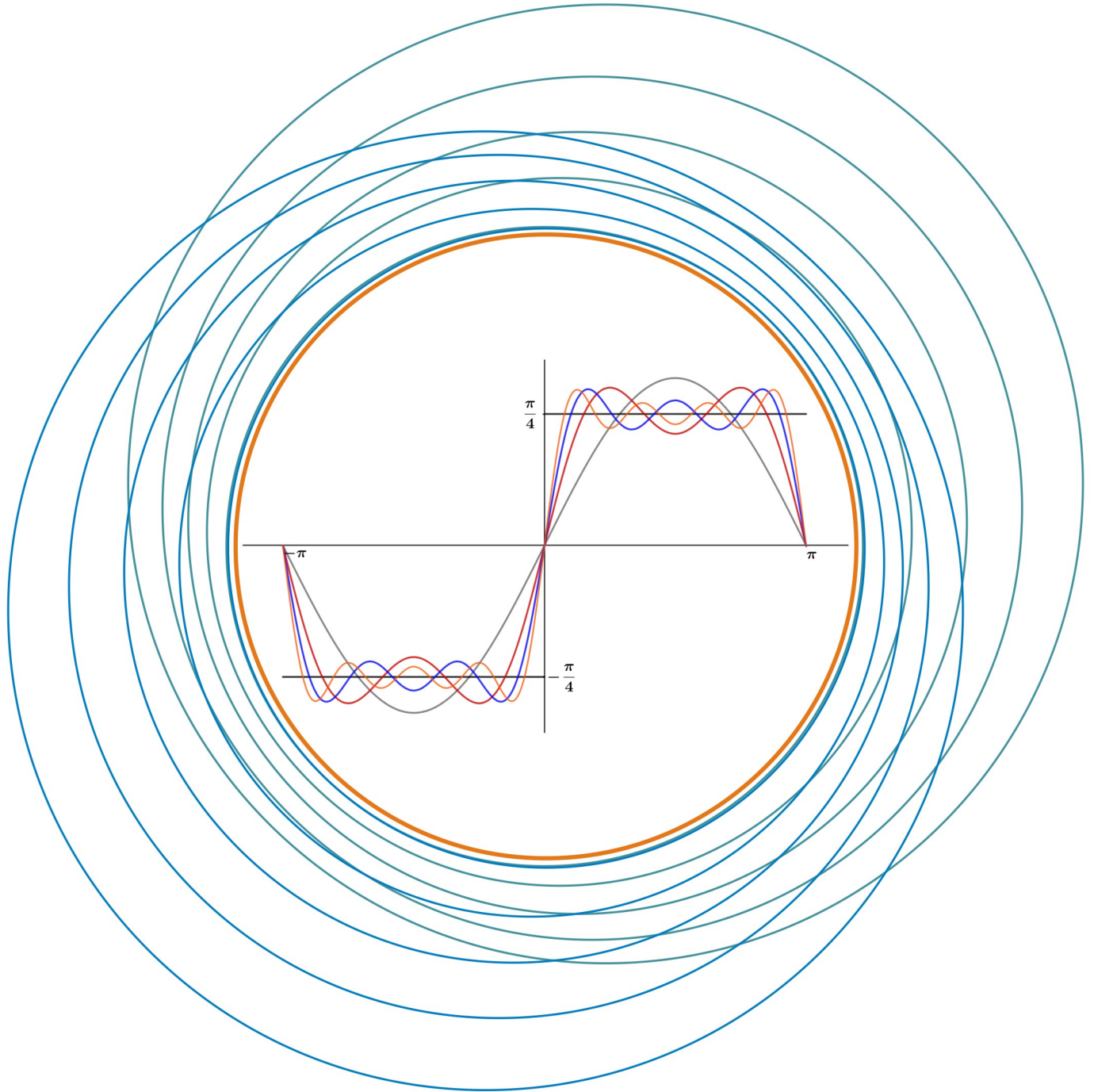
[Repository of the Faculty of Electrical Engineering, Mechanical Engineering and Naval Architecture - University of Split](#)



UNIVERSITY OF SPLIT



DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI



MATEMATIKA 3

N. Jakovčević Stor, I. Grgić, P. M. Gojun, M. Čatipović

MATEMATIKA 3

Osnovni pojmovi i riješeni zadaci

NEVENA JAKOVČEVIĆ - STOR, IVANA GRGIĆ, PETRA MARIJA GOJUN, MARIJA
ČATIPOVIĆ / MATEMATIKA 3, OSNOVNI POJMOVI I RIJEŠENI ZADACI



Nakladnik
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE,
STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Urednik
prof. dr. sc. Vladan Papić

Autori
doc. dr. sc. Nevena Jakovčević-Stor
Ivana Grgić, prof. mat. i inf.
Petra Marija Gojun, mag. math.
Marija Čatipović, mag. math.

Recenzenti
izv. prof. dr. sc. Anita Matković

ISBN 978-953-290-126-9



Ovo je djelo licencirano pod međunarodnom licencom CC BY-NC-ND 4.0 koja dopušta preuzimanje djela i dijeljenje s drugima, pod uvjetom da se navedu autori, te da se djelo ne smije mijenjati ili koristiti u komercijalne svrhe.

Autori i nakladnik ove knjige uložili su sve napore u njejoj pripremi sa željom da prenesu točne i mjerodavne informacije vezane s temom knjige. Autori i izdavač ni u kojem slučaju ne odgovaraju za slučajne ili posljedne štete povezane s izvedbom ili primjenom postupaka koji se u knjizi opisuju.

Prvo izdanje objavljeno u travnju 2023.g.

MATEMATIKA 3, OSNOVNI POJMOVI I RIJEŠENI ZADACI

Nevena Jakovčević Stor, Ivana Grgić, Petra Marija Gojun, Marija Čatipović

Split, 2023.

SADRŽAJ**1 PREDGOVOR****2 VEKTORSKA ANALIZA** **1**

2.1 Osnovni pojmovi 1

2.2 Zadaci 5

3 KRIVULJNI INTEGRAL **13**

3.1 Osnovni pojmovi 13

3.2 Zadaci 16

4 PLOŠNI INTEGRAL **28**

4.1 Osnovni pojmovi 28

4.2 Zadaci 32

5 FOURIEROV RED **56**

5.1 Osnovni pojmovi 56

5.2 Zadaci 58

6 FOURIEROV INTEGRAL **71**

6.1 Osnovni pojmovi 71

6.2 Zadaci 73

7 LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA **82**

7.1 Osnovni pojmovi 82

7.2 Zadaci 84

8 LITERATURA **91**

1 PREDGOVOR

Ova skripta namijenjena je studentima Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Splitu koji pohađaju kolegij Matematika 3. Svrha pisanja skripte bila je objediniti nastavne materijale kolegija, prvenstveno auditornih vježbi. Skripta sadržava nastavno gradivo predviđeno nastavnim planom kolegija u obliku zadatka s auditornih vježbi, zadatka koji su se tijekom godina pojavljivali na kolokvijima i ispitima te teorijskih osnova nužnih za rješavanje zadataka. Nadamo se da će studentima biti korisna u boljem razumijevanju i lakšem savladavanju gradiva.

2 VEKTORSKA ANALIZA

2.1 Osnovni pojmovi

Vektorske funkcije. Limes, derivacija i integral vektorske funkcije.

Vektorska funkcija skalarnog argumenta je funkcija s intervala I u vektorski prostor V^n ($n = 1, 2, 3$), odnosno $\vec{r} : I \rightarrow V^n$.

Za $n = 3$ koristimo oznaku

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in I.$$

$x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R}$ zovemo **skalarnim komponentama** vektorske funkcije \vec{r} .

Neka su zadane vektorska funkcija $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ i vektor $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$. Tada je $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$ ako i samo ako je

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a_x, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = a_y, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = a_z.$$

Derivacija vektorske funkcije $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ može se računati pomoću derivacija njenih komponenti, tj. vrijedi

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Za funkciju $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [a, b]$, kažemo da je **integrabilna** na segmentu $[a, b]$ ako su njene skalarne komponente $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$ integrabilne na $[a, b]$. Tada je

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \left(\int_a^b x(t) dt \right) \vec{i} + \left(\int_a^b y(t) dt \right) \vec{j} + \left(\int_a^b z(t) dt \right) \vec{k}.$$

Svojstva derivacije i integrala vektorskih funkcija su slična onima za realne funkcije.

Ako je $\vec{r}(t)$ neprekidna vektorska funkcija i $\vec{s}(t)$ njena **primitivna funkcija** na I , tj. ona za koju vrijedi $\vec{s}'(t) = \vec{r}(t)$, $\forall t \in I$, onda za $a, b \in I$ vrijedi

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \vec{s}(b) - \vec{s}(a).$$

Skalarna i vektorska polja. Gradijent, divergencija, rotacija i usmjerene derivacije

Skalarno polje je funkcija sa skupa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ u skup \mathbb{R} , odnosno $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
 Vektorsko polje je funkcija sa skupa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ u skup V^3 , odnosno $\vec{a} : \Omega \rightarrow V^3$.

Pišemo $\vec{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}$ gdje su $a_x, a_y, a_z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, (komponente ili koordinatne funkcije) skalarna polja.

Parcijalne derivacije vektorskog polja se definiraju potpuno analogno parcijalnim derivacijama skalarnog polja (realne funkcije triju varijabli) i svode se na parcijalne derivacije njegovih komponenti:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{a}}{\partial x} &= \frac{\partial a_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial a_y}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial a_z}{\partial x}\vec{k} \\ \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} &= \frac{\partial a_x}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial a_z}{\partial y}\vec{k} \\ \frac{\partial \vec{a}}{\partial z} &= \frac{\partial a_x}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial a_y}{\partial z}\vec{j} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\vec{k}\end{aligned}$$

Ako skalarno ili vektorsko polje ima sve parcijalne derivacije, onda kažemo da je ono derivabilno.

Neka su $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ i $\vec{a} : \Omega \rightarrow V^3$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, derivabilno skalarno i vektorsko polje, redom.

- **Gradijentom** skalarnog polja f nazivamo vektorsko polje $\text{grad } f : \Omega \rightarrow V^3$ definirano sa

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k},$$

- **Divergencijom** vektorskog polja \vec{a} nazivamo skalarno polje $\text{div } \vec{a} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definirano sa

$$\text{div } \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

- **Rotacijom** vektorskog polja \vec{a} nazivamo vektorsko polje $\text{rot } \vec{a} : \Omega \rightarrow V^3$ definirano sa

$$\text{rot } \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)\vec{k}.$$

Primjetimo da $\text{rot } \vec{a}$ dopušta formalni zapis u obliku determinante

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Gradijent, divergencija i rotacija mogu se opisati samo jednim operatorom. Znakom ∇ (nabla) označimo tzv. **Hamiltonov diferencijalni operator** - formalni vektor

$$\nabla \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Na vektorskom prostoru svih derivabilnih skalarnih (vektorskih) polja vrijedi:

$$\begin{aligned}\nabla f &= \text{grad } f, & (\text{djelovanje operatora } \nabla \text{ na skalarno polje } f); \\ \nabla \cdot \vec{a} &= \text{div } \vec{a}, & (\text{formalni skalarni umnožak } \nabla \text{ i vektorskog polja } \vec{a}); \\ \nabla \times \vec{a} &= \text{rot } \vec{a}, & (\text{formalni vektorski umnožak } \nabla \text{ i vektorskog polja } \vec{a}).\end{aligned}$$

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

je tzv. **Laplaceov diferencijalni operator** (delta). Ako je f dvaput derivabilno skalarno polje onda je

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2};$$

Ako je \vec{a} dvaput derivabilno vektorsko polje onda je

$$\begin{aligned}\Delta \vec{a} &= (\Delta a_x) \vec{i} + (\Delta a_y) \vec{j} + (\Delta a_z) \vec{k} \\ &= \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2} \right) \vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right) \vec{k}\end{aligned}$$

Za vektorsko polje $\vec{a} : \Omega \rightarrow V^3$ kažemo da je **potencijalno** ako postoji skalarno polje $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ takvo da je $\vec{a} = -\text{grad } f$. Tada f nazivamo potencijalom polja \vec{a} .

Svako vektorsko polje \vec{a} za koje je $\text{rot } \vec{a} = \vec{0}$ nazivamo bezvrtložno, a svako ono za koje je $\text{div } \vec{a} = 0$ solenoidalno.

Neka je $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilno skalarno polje i $\vec{s} = s_x \vec{i} + s_y \vec{j} + s_z \vec{k}$ jedinični vektor. Tada **derivaciju skalarnog polja** f u točki T_0 u smjeru vektora \vec{s} računamo kao

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(T_0) = \text{grad } f(T_0) \cdot \vec{s} = (\vec{s} \cdot \nabla) f(T_0).$$

Ako \vec{s} nije jedinični vektor uzmemo jedinični vektor $\vec{s}_0 = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$ u smjeru vektora \vec{s} .

Skalarno polje f najbrže raste u smjeru što ga određuje $\text{grad } f$, a najbrže pada u smjeru što ga određuje $-\text{grad } f$.

Neka je $\vec{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z) \vec{i} + a_y(x, y, z) \vec{j} + a_z(x, y, z) \vec{k}$ derivabilno vektorsko polje na Ω , $\vec{s} = s_x \vec{i} + s_y \vec{j} + s_z \vec{k}$ jedinični vektor i $T_0 \in \Omega$. Tada **derivaciju vektorskog polja** \vec{a} u točki T_0 u smjeru vektora \vec{s} računamo kao

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{s}}(T_0) &= \left(s_x \frac{\partial}{\partial x} + s_y \frac{\partial}{\partial y} + s_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{a}(T_0) = (\vec{s} \cdot \nabla) \vec{a}(T_0) \\ &= s_x \frac{\partial \vec{a}}{\partial x}(T_0) + s_y \frac{\partial \vec{a}}{\partial y}(T_0) + s_z \frac{\partial \vec{a}}{\partial z}(T_0).\end{aligned}$$

Još neke formule:

$$\nabla (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \nabla (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \nabla (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{b} \times \text{rot } \vec{a} + b \frac{\partial \vec{a}}{\partial b} + \vec{a} \times \text{rot } \vec{b} + a \frac{\partial \vec{b}}{\partial a}$$

$$\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = b \frac{\partial \vec{a}}{\partial b} - a \frac{\partial \vec{b}}{\partial a} + \vec{a} \text{ div } \vec{b} - \vec{b} \text{ div } \vec{a}$$

$$\nabla (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{rot } \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot } \vec{b}$$

$$\Delta f = \text{div grad } f$$

$$\Delta \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \text{rot rot } \vec{a}$$

Ostalo:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

2.2 Zadaci

- Krivulja K je presjek plohe $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$ i ravnine $x + y = 1$. Odredite jednu njenu parametrizaciju te vektor smjera tangente u točki $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.
- Izračunajte gradijent skalarnog polja $f(x, y, z) = \ln \frac{yz}{x} + 2$. Odredite točku T za koju je $(\text{grad } f)_T = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.
- Zadano je vektorsko polje $\vec{v} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + xyz\vec{k}$. Izračunajte $\text{div } \vec{v}$ i $\text{rot } \vec{v}$.
- Izračunajte usmjerenu derivaciju polja $\varphi = xy^2 + z^3 - xyz$ u točki $T(1, 1, 2)$ u smjeru vektora koji s koordinatnim osima zatvara kuteve 60° , 45° i 60° respektivno.
- Izračunajte usmjerenu derivaciju vektorskog polja $\vec{a} = xz\vec{i} + 3\vec{j} - y\sqrt{z}\vec{k}$ u točki $T(0, -4, 1)$ u smjeru vektora $\vec{s} = (2, -2, -1)$.
- Izračunajte \vec{v} ako je $\vec{v} = \text{grad}(r^2 \ln r)$, gdje je \vec{r} radij-vektor točke $T(x, y, z)$ i r njegova duljina.
- Izračunajte $\frac{\partial [r(\vec{a} \cdot \vec{r})]}{\partial \vec{a}}$ ako je \vec{a} konstantan vektor, a \vec{r} radij-vektor točke $T(x, y, z)$.
- Izračunajte $\nabla [(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{a} \times \vec{r})]$ ako je \vec{a} konstantan vektor, a \vec{r} radij-vektor točke $T(x, y, z)$.
- Izračunajte $\nabla [r \nabla (r\vec{r})]$ ako je \vec{r} radij-vektor točke $T(x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$.
- Izračunajte usmjerenu derivaciju polja $\vec{v} = \text{grad}(r^2 \ln r)$ u točki $T(\sqrt{3}, 0, 1)$ u smjeru vektora \vec{k} .
- Izračunajte

$$\frac{\partial \Delta \vec{a}}{\partial \vec{s}}$$
 ako je $\vec{a} = 2x^2y\vec{i} + 5xy\vec{j} + xy^2\vec{k}$ i $\vec{s} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.
- Izračunajte

$$\nabla \left(\frac{r^2 \vec{r}}{\vec{a} \cdot \vec{r}} \right)$$
 ako je \vec{a} konstantan vektor, a \vec{r} radij-vektor točke $T(x, y, z)$.
- Izračunajte $\Delta r \vec{r}$ ako je \vec{r} radij-vektor točke $T(x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$.
- Izračunajte

$$\nabla \ln \{ r e^r + \nabla [r(\vec{a} \times \vec{r})] \}$$
 ako je \vec{a} konstantan vektor, \vec{r} radij-vektor točke $T(x, y, z)$, a r njegova duljina.
- Izračunajte

$$\frac{\partial (\sin r \vec{r})}{\partial \vec{s}}$$
 u točki $T(1, 1, 1)$ ako je $\vec{s} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$.

Rješenja:

1. Krivulja K je presjek plohe $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$ i ravnine $x + y = 1$. Odredite jednu njenu parametrizaciju te vektor smjera tangente u točki $A \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right)$.

Odredimo projekciju krivulje K na xz ravninu tako da $y = 1 - x$ uvrstimo u jednadžbu prve plohe.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2(1-x)^2 + z^2 &= 2 \\ 4x^2 - 4x + z^2 &= 0 \\ x^2 - x + \frac{1}{4}z^2 &= 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{z^2}{4} &= \frac{1}{4} \\ \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{z^2}{1} &= 1 \end{aligned}$$

Projekcija je pomaknuta elipsa koju možemo parametrizirati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, \\ z(t) &= \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Još preostaje odrediti $y(t)$

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - x(t) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos t \end{aligned}$$

pa je time dobivena jedna parametrizacija krivulje K .

Izjednačavanjem $x(t) = \frac{1}{2}$, $y(t) = \frac{1}{2}$, $z(t) = 1$ dobijemo parametar t_0 koji odgovara točki A . Dakle, $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Derivacije komponenata su $x'(t) = -\frac{1}{2} \sin t$, $y'(t) = \frac{1}{2} \sin t$, $z'(t) = \cos t$. Vektor smjera tangente u točki A je

$$\vec{s} = \frac{-1}{2} \sin t_0 \vec{i} + \frac{1}{2} \sin t_0 \vec{j} + \cos t_0 \vec{k} = \frac{-1}{2} \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j}.$$

2. Izračunajte gradijent skalarnog polja $f(x, y, z) = \ln \frac{yz}{x} + 2$. Odredite točku T za koju je $(\text{grad } f)_T = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} = \frac{-1}{x} \vec{i} + \frac{1}{y} \vec{j} + \frac{1}{z} \vec{k}$$

Znamo da su dva vektora jednaka ako su im jednake odgovarajuće komponente, stoga dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{-1}{x} = 2 &\Rightarrow x = \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{y} = -1 &\Rightarrow y = -1 \\ \frac{1}{z} = 3 &\Rightarrow z = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Tražena točka je $T\left(\frac{-1}{2}, -1, \frac{1}{3}\right)$.

3. Zadano je vektorsko polje $\vec{v} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + xyz\vec{k}$. Izračunajte $\text{div } \vec{v}$ i $\text{rot } \vec{v}$.

Divergencija vektorskog polja je skalarno polje koje računamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{\partial y} + \frac{\partial xyz}{\partial z} \\ &= 2x + 2y + xy. \end{aligned}$$

Rotacija vektorskog polja je vektorsko polje koje računamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & xyz \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \left(\frac{\partial xyz}{\partial y} - \frac{\partial y^2}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial xyz}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial y^2}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial y} \right) \\ &= xz\vec{i} - yz\vec{j}. \end{aligned}$$

4. Izračunajte usmjerenu derivaciju polja $\varphi = xy^2 + z^3 - xyz$ u točki $T(1, 1, 2)$ u smjeru vektora koji s koordinatnim osima zatvara kuteve 60° , 45° i 60° respektivno.

Derivaciju skalarnog polja φ u točki T u smjeru jediničnog vektora \vec{s} računamo pomoću $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{s}}(T) = \text{grad } \varphi(T) \cdot \vec{s}$. Jedinični vektor \vec{s} koji s koordinatnim osima zatvara kuteve 60° , 45° i 60° respektivno jednak je

$$\vec{s} = \cos 60^\circ \vec{i} + \cos 45^\circ \vec{j} + \cos 60^\circ \vec{k} = \frac{1}{2} \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} + \frac{1}{2} \vec{k}.$$

Gradijent skalarnog polja φ je

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = (y^2 - yz)\vec{i} + (2xy - xz)\vec{j} + (3z^2 - xy)\vec{k}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{s}} &= \left((y^2 - yz)\vec{i} + (2xy - xz)\vec{j} + (3z^2 - xy)\vec{k} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k} \right) \\ &= \frac{y^2 - yz}{2} + \frac{\sqrt{2}(2xy - xz)}{2} + \frac{3z^2 - xy}{2}.\end{aligned}$$

Konačno, vrijednost u točki T iznosi $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{s}}(1, 1, 2) = 5$.

5. Izračunajte usmjerenu derivaciju vektorskog polja $\vec{a} = xz\vec{i} + 3\vec{j} - y\sqrt{z}\vec{k}$ u točki $T(0, -4, 1)$ u smjeru vektora $\vec{s} = (2, -2, -1)$.

Jedinični vektor u smjeru vektora \vec{s} je vektor $\vec{s}_0 = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}$. Derivaciju vektorskog polja \vec{a} u smjeru vektora \vec{s} računamo pomoću

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{s}} = (\vec{s}_0 \cdot \text{grad}(a_x))\vec{i} + (\vec{s}_0 \cdot \text{grad}(a_y))\vec{j} + (\vec{s}_0 \cdot \text{grad}(a_z))\vec{k}.$$

Gradijenti skalarnih komponenti su

$$\begin{aligned}\text{grad}(a_x) &= \text{grad}(xz) = z\vec{i} + x\vec{k}, \\ \text{grad}(a_y) &= \text{grad}(3) = \vec{0}, \\ \text{grad}(a_z) &= \text{grad}(-y\sqrt{z}) = -\sqrt{z}\vec{j} - \frac{y}{2\sqrt{z}}\vec{k}.\end{aligned}$$

Sada možemo izračunati

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{s}} &= \left(\vec{s}_0 \cdot (z\vec{i} + x\vec{k}) \right)\vec{i} + (\vec{s}_0 \cdot \vec{0})\vec{j} + \left(\vec{s}_0 \cdot \left(-\sqrt{z}\vec{j} - \frac{y}{2\sqrt{z}}\vec{k} \right) \right)\vec{k} \\ &= \left(\frac{2}{3}z - \frac{1}{3}x \right)\vec{i} + \left(\frac{2}{3}\sqrt{z} + \frac{y}{6\sqrt{z}} \right)\vec{k} \\ \frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{s}}(0, -4, 1) &= \frac{2}{3}\vec{i}.\end{aligned}$$

6. Izračunajte \vec{v} ako je $\vec{v} = \text{grad}(r^2 \ln r)$, gdje je \vec{r} radij-vektor točke $T(x, y, z)$ i r njegova duljina.

Radi jednostavnijeg računa koristimo Hamiltonov operator ∇ .

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \nabla(r^2 \ln r) = \nabla(r^2 \underline{\ln r}) + \nabla(\underline{r^2} \ln r) \\ &= (\ln r)\nabla(r^2) + r^2\nabla(\ln r) = (\ln r)2r\vec{r}_0 + r^2\frac{1}{r}\vec{r}_0 \\ &= (\ln r)2r\frac{\vec{r}}{r} + r\frac{\vec{r}}{r} = (2\ln r + 1)\vec{r}.\end{aligned}$$

7. Izračunajte $\frac{\partial [r(\vec{a} \cdot \vec{r})]}{\partial \vec{a}}$ ako je \vec{a} konstantan vektor, a \vec{r} radij-vektor točke $T(x, y, z)$.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial [r(\vec{a} \cdot \vec{r})]}{\partial \vec{a}} &= \vec{a}_0 \cdot \text{grad} (r(\vec{a} \cdot \vec{r})) \\
 &= \vec{a}_0 \cdot \nabla (r(\vec{a} \cdot \vec{r})) \\
 &= \vec{a}_0 \cdot \nabla (r(\vec{a} \cdot \vec{r})) + \vec{a}_0 \cdot \nabla (r(\vec{a} \cdot \vec{r})) \\
 &= \vec{a}_0 (\vec{a} \cdot \vec{r}) \nabla r + \vec{a}_0 r \nabla (\vec{a} \cdot \vec{r}) \\
 &= \vec{a}_0 (\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{r}_0 + \vec{a}_0 r \vec{a} \\
 &= \vec{a}_0 \cdot \vec{r}_0 (\vec{a} \cdot \vec{r}) + r (\vec{a}_0 \cdot \vec{a}) \\
 &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{ar} \vec{a} \cdot \vec{r} + r \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{a}}{a} \right) \\
 &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{ar} \vec{a} \cdot \vec{r} + ar
 \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili

$$\begin{aligned}
 \nabla (\vec{a} \cdot \vec{r}) &= \vec{r} \times \text{rot } \vec{a} + \vec{a} \times \text{rot } \vec{r} + r \frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{r}} + a \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{a}} \\
 &= \vec{r} \times \vec{0} + \vec{a} \times \vec{0} + r \vec{0} + a \vec{a}_0 \\
 &= \vec{a}.
 \end{aligned}$$

8. Izračunajte $\nabla [(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{a} \times \vec{r})]$ ako je \vec{a} konstantan vektor, a \vec{r} radij-vektor točke $T(x, y, z)$.

Primijetimo da nabla djeluje na vektorsko polje, što znači da računamo divergenciju polja $(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{a} \times \vec{r})$.

$$\begin{aligned}
 \nabla [(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{a} \times \vec{r})] &= \nabla [(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{a} \times \vec{r})] + \nabla [(\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{a} \times \vec{r})] \\
 &= (\vec{a} \times \vec{r}) \cdot \nabla (\vec{a} \cdot \vec{r}) + (\vec{a} \cdot \vec{r}) \nabla (\vec{a} \times \vec{r}) \\
 &= (\vec{a} \times \vec{r}) \cdot \vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{r}) (\vec{r} \cdot \text{rot } \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot } \vec{r}) \\
 &= 0 + (\vec{r} \cdot \vec{0} - \vec{a} \cdot \vec{0}) = 0 + 0 = 0.
 \end{aligned}$$

9. Izračunajte $\nabla [r \nabla (r \vec{r})]$ ako je \vec{r} radij-vektor točke $T(x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$.

Izračunajmo prvo: $\nabla (r \vec{r}) = \nabla (r \vec{r}) + \nabla (r \vec{r}) = \vec{r} \cdot \nabla r + r \nabla \vec{r} = \vec{r} \cdot \vec{r}_0 + 3r = 4r$.

$$\nabla [r \nabla (r \vec{r})] = \nabla (4r^2) = 8r \vec{r}_0 = 8\vec{r}.$$

10. Izračunajte usmjerenu derivaciju polja $\vec{v} = \text{grad}(r^2 \ln r)$ u točki $T(\sqrt{3}, 0, 1)$ u smjeru vektora \vec{k} .

Usmjerenu derivaciju vektorskog polja u smjeru jedničnog vektora \vec{k} računamo korištenjem novog operatora $\vec{s}_0 \cdot \nabla$. Ovdje je $\vec{s}_0 = \vec{k}$. U 6. zadatku smo izračunali da je $\vec{v} = (2 \ln r + 1) \vec{r}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{k}} &= (\vec{k} \cdot \nabla) \vec{v} = (\vec{k} \cdot \nabla) (2 \ln r + 1) \vec{r} \\ &= (\vec{k} \cdot \nabla) (2 \ln r + 1) \vec{r} + (\vec{k} \cdot \nabla) (2 \ln r + 1) \vec{r} \\ &= \vec{r} \left[\vec{k} \cdot \nabla (2 \ln r + 1) \right] + (2 \ln r + 1) (\vec{k} \cdot \nabla) \vec{r} \\ &= \vec{r} \left[\vec{k} \left(\frac{2}{r} \vec{r}_0 \right) \right] + (2 \ln r + 1) \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{k}} \\ &= \vec{r} \left(\vec{k} \cdot \vec{r} \frac{2}{r^2} \right) + (2 \ln r + 1) \vec{k}. \end{aligned}$$

U ovom postupku je jako važno paziti na to da ne vrijedi svojstvo asocijativnosti za skalarno množenje vektora. Prema tome vektor \vec{r} u četvrtoj liniji ne množi vektor \vec{r}_0 . Prvo se mora izvršiti skalarno množenje unutar uglate zagrade $\vec{r}_0 \cdot \vec{k}$, a zatim vektor \vec{r} pomnožiti tako dobivenim skalarom.

Radij-vektor točke T je $\vec{r}_T = \vec{r} = \sqrt{3} \vec{i} + \vec{k}$ duljine $r = 2$. Stoga imamo:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{k}} (\sqrt{3}, 0, 1) = \frac{\sqrt{3} \vec{i} + \vec{k}}{2} + (2 \ln 2 + 1) \vec{k}.$$

11. Izračunajte

$$\frac{\partial \Delta \vec{a}}{\partial \vec{s}}$$

ako je $\vec{a} = 2x^2 y \vec{i} + 5xy \vec{j} + xy^2 \vec{k}$ i $\vec{s} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Budući da je \vec{a} vektorsko polje primijenit ćemo:

$$\Delta \vec{a} = \nabla \nabla \vec{a} - \nabla \times (\nabla \times \vec{a}).$$

Imamo da je $\nabla \vec{a} = 4xy + 5x$, a $\nabla \times \vec{a} = 2xy \vec{i} - y^2 \vec{j} + (5y - 2x^2) \vec{k}$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{a} &= \nabla (4xy + 5x) - \nabla \times (2xy \vec{i} - y^2 \vec{j} + (5y - 2x^2) \vec{k}) \\ &= (4y + 5) \vec{i} + 4x \vec{j} - (5 \vec{i} + 4x \vec{j} - 2x \vec{k}) \\ &= 4y \vec{i} + 2x \vec{k} = \vec{a}'. \end{aligned}$$

Za računanje usmjerene derivacije vektorskog polja $\Delta \vec{a} = \vec{a}'$ odredimo:

$$\text{grad}(a'_x) = \text{grad}(4y) = 4 \vec{j},$$

$$\text{grad}(a'_y) = \text{grad} 0 = \vec{0},$$

$$\text{grad}(a'_z) = \text{grad}(2x) = 2 \vec{i}.$$

Jedinični vektor u smjeru vektora \vec{s} je $\vec{s}_0 = \frac{1}{\sqrt{14}} (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$ i konačno je

$$\frac{\partial \Delta \vec{a}}{\partial s} = (\vec{s}_0 4\vec{j})\vec{i} + (\vec{s}_0 \cdot \vec{0})\vec{j} + (\vec{s}_0 2\vec{i})\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{14}} (8\vec{i} + 2\vec{k}).$$

12. Izračunajte

$$\nabla \left(\frac{r^2 \vec{r}}{\vec{a} \cdot \vec{r}} \right)$$

ako je \vec{a} konstantan vektor, a \vec{r} radij-vektor točke $T(x, y, z)$.

Nabla djeluje na vektorsko polje i kao rezultat moramo dobiti skalarno polje. Izraz unutar zagrade ćemo drugačije zapisati tako da odvojimo skalarna od vektorskih polja radi preglednijeg zapisa. Koristit ćemo $\nabla \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}$.

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{r^2 \vec{r}}{\vec{a} \cdot \vec{r}} \right) &= \nabla \left(\frac{r^2}{\vec{a} \cdot \vec{r}} \vec{r} \right) = \nabla \left(\frac{r^2}{\vec{a} \cdot \vec{r}} \right) \vec{r} + \nabla \left(\frac{r^2}{\vec{a} \cdot \vec{r}} \vec{r} \right) \\ &= \vec{r} \cdot \nabla \left(\frac{r^2}{\vec{a} \cdot \vec{r}} \right) + \frac{r^2}{(\vec{a} \cdot \vec{r})} \nabla \vec{r} \\ &= \vec{r} \frac{(\vec{a} \cdot \vec{r}) \nabla r^2 - r^2 \nabla (\vec{a} \cdot \vec{r})}{(\vec{a} \cdot \vec{r})^2} + \frac{r^2}{(\vec{a} \cdot \vec{r})} 3 \\ &= \vec{r} \cdot \frac{2\vec{r} (\vec{a} \cdot \vec{r}) - r^2 \vec{a}}{(\vec{a} \cdot \vec{r})^2} + \frac{3r^2}{(\vec{a} \cdot \vec{r})} \\ &= \frac{2r^2 (\vec{a} \cdot \vec{r}) - r^2 (\vec{a} \cdot \vec{r})}{(\vec{a} \cdot \vec{r})^2} + \frac{3r^2}{(\vec{a} \cdot \vec{r})} \\ &= \frac{r^2}{(\vec{a} \cdot \vec{r})} + \frac{3r^2}{(\vec{a} \cdot \vec{r})} = \frac{4r^2}{(\vec{a} \cdot \vec{r})}. \end{aligned}$$

13. Izračunajte $\Delta r \vec{r}$ ako je \vec{r} radij-vektor točke $T(x, y, z)$, $r = |\vec{r}|$.

Koristit ćemo rezultate iz 9. zadatka.

$$\begin{aligned} \Delta r \vec{r} &= \nabla \nabla r \vec{r} - \nabla \times (\nabla \times r \vec{r}) \\ &= \nabla (4r) - \nabla \times [\nabla r \times \vec{r} + r (\nabla \times \vec{r})] \\ &= 4\vec{r}_0 - \nabla \times (\vec{r}_0 \times \vec{r} + r \vec{0}) = 4\vec{r}_0 - \nabla \times \vec{0} \\ &= 4\vec{r}_0 - \vec{0} = 4\vec{r}_0. \end{aligned}$$

14. Izračunajte

$$\nabla \ln \{ r e^r + \nabla [r (\vec{a} \times \vec{r})] \}$$

ako je \vec{a} konstantan vektor, \vec{r} radij-vektor točke $T(x, y, z)$, a r njegova duljina.

Izračunajmo prvo $\nabla [r (\vec{a} \times \vec{r})]$, pri čemu ćemo koristiti rezultate iz 8. zadatka.

$$\begin{aligned} \nabla [r (\vec{a} \times \vec{r})] &= (\vec{a} \times \vec{r}) \nabla r + r \nabla (\vec{a} \times \vec{r}) \\ &= (\vec{a} \times \vec{r}) \vec{r}_0 + r \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Sada je

$$\nabla \ln \{ r e^r + \nabla [r (\vec{a} \times \vec{r})] \} = \nabla \ln (r e^r) = \frac{1}{r e^r} (e^r + r e^r) \vec{r}_0 = \frac{1+r}{r^2} \vec{r}.$$

15. Izračunajte

$$\frac{\partial(\sin r \vec{r})}{\partial \vec{s}}$$

u točki $T(1, 1, 1)$ ako je $\vec{s} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$.

Vektor \vec{s} je jedinični vektor.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sin r \vec{r})}{\partial \vec{s}} &= (\vec{s} \cdot \nabla) (\sin r \vec{r}) = (\vec{s} \cdot \nabla) (\sin r \vec{r}) + (\vec{s} \cdot \nabla) (\underline{\sin r \vec{r}}) \\ &= \vec{r} [\vec{s} (\nabla \sin r)] + \sin r \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{s}} = \vec{r} (\vec{s} (\cos r \vec{r}_0)) + \sin r \vec{s}. \end{aligned}$$

Radij-vektor točke T je $\vec{r}_T = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Uočimo

$$(\vec{r}_0)_T = \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = \vec{s} = \vec{s}_0$$

i $\vec{s}_0 \cdot \vec{r}_0 = 1$ iz čega slijedi $\frac{\partial(\sin r \vec{r})}{\partial \vec{s}} = \vec{r} \cos r + \vec{s}_0 \sin r$.

Konačno je

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sin r \vec{r})}{\partial \vec{s}}(1, 1, 1) &= (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \cos \sqrt{3} + \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3} \\ &= (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \left(\cos \sqrt{3} + \frac{\sin \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

3 KRIVULJNI INTEGRAL

3.1 Osnovni pojmovi

Krivuljni integral prve vrste

Neka je $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [a, b]$ vektorska funkcija i neka je krivulja $\Gamma = \{T(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in [a, b]\}$ njen graf.

Uređeni par $([a, b], \vec{r}(t))$ zove se **parametrizacija krivulje** Γ .

Za krivulju $\Gamma \dots \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [a, b]$, kažemo da je **jednostavna glatka krivulja** ili **Jordanov luk** ako vrijedi:

1. \vec{r} je neprekidna injekcija na $[a, b]$,
2. derivacija $\vec{r}'(t)$ postoji za svako $t \in [a, b]$ i neprekidna je,
3. $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ za svako $t \in [a, b]$.

Ako je $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, onda krivulju zovemo zatvorenom krivuljom.

Neka je Jordanov luk Γ zadan parametrizacijom

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b],$$

i neka je na njemu zadano skalarno polje $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, ($\Gamma \subset \Omega$). Ako je funkcija

$$t \mapsto f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}, \quad t \in [a, b],$$

integrabilna, onda pripadni određeni integral

$$\int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot |\vec{r}'(t)| dt$$

nazivamo **integralom skalarnoga polja f po krivulji Γ** (ili **krivuljnim integralom prve vrste**) i označavamo sa

$$\int_{\Gamma} f ds.$$

- Krivuljni integral prve vrste ne ovisi o odabranoj parametrizaciji krivulje.
- U slučaju kada je Γ po dijelovima Jordanov luk ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$) vrijedi

$$\int_{\Gamma} f ds \stackrel{\text{def.}}{=} \int_{\Gamma_1} f ds + \dots + \int_{\Gamma_n} f ds.$$

Krivuljni integral druge vrste

Neka je dano vektorsko polje $\vec{a} : \Omega \rightarrow V_O^3$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, te neka je orijentirani Jordanov luk $\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{B} \subset \Omega$ zadan parametrizacijom $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [a, b]$. Ako je funkcija

$$t \mapsto a_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + a_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + a_z(x(t), y(t), z(t))z'(t),$$

$t \in [a, b]$ integrabilna, onda pripadni određeni integral

$$\begin{aligned} \int_a^b a_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + a_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + a_z(x(t), y(t), z(t))z'(t) dt \\ = \int_a^b [\vec{a}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}'(t)] dt \end{aligned}$$

nazivamo **integralom vektorskoga polja \vec{a} po orijentiranoj krivulji $\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{B}$** (ili **krivuljnim integralom druge vrste**) i označavamo sa

$$\int_{\hat{\Gamma}} \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

- $\int_{\hat{B}\hat{A}} \vec{a} \cdot d\vec{r} = - \int_{\hat{A}\hat{B}} \vec{a} \cdot d\vec{r}$;
- $\int_{\hat{\Gamma}} (\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) \cdot d\vec{r} = \lambda \int_{\hat{\Gamma}} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \mu \int_{\hat{\Gamma}} \vec{b} \cdot d\vec{r}$

gdje su \vec{a}, \vec{b} integrabilna vektorska polja, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{B}$ orijentirana po dijelovima glatka krivulja.

Vektorsko polje $\vec{a} : \Omega \rightarrow V_O^3$ je **potencijalno** ili **konzervativno** ako postoji skalarno polje $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ takvo da je $\vec{a} = \text{grad } f$. Polje f je potencijal polja \vec{a} .

- Krivuljni integral vektorskog polja $\vec{a} : \Omega \rightarrow V_O^3$ ne ovisi o putu integracije već samo o početnoj i krajnjoj točki ako i samo ako je \vec{a} potencijalno polje.
- Na konveksnom skupu Ω vrijedi

$$\vec{a} = \text{grad } f \quad \Leftrightarrow \quad \text{rot } \vec{a} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\hat{\Gamma}} \vec{a} \cdot d\vec{r} = 0, \quad \forall \hat{\Gamma}.$$

Neka su $P, Q : X \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije na otvorenom skupu $X \subseteq \mathbb{R}^2$ te neka je $\hat{\Gamma} \subset X$ pozitivno orijentirani zatvoreni po dijelovima Jordanov luk. Tada vrijedi tzv. **Greenova formula**

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\hat{\Gamma}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

pri čemu je $D \subseteq X$ područje omeđeno krivuljom Γ , tj. $\partial D = \Gamma$. (∂D je oznaka za rub skupa D).

3.2 Zadaci

1. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int_K (x - y) ds$$

ako je krivulja K kružnica $x^2 + y^2 = 3x$.

2. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int_K (x + y) ds$$

ako je krivulja K trokut s vrhovima $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ i $C(0, 0)$.

3. Izračunajte

$$I = \int_K \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) ds$$

ako je krivulja K astroida dana jednadžbama $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.

4. Izračunajte

$$I = \int_K (x^2 + y^2) ds$$

ako je krivulja K presjek ploha $x^2 + 2y^2 = 4$ i $z = y$, $y \geq 1$.

5. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int_K (y - 1) dx$$

ako je K dio krivulje $x^2 + y^2 = 2x + 2y$ koja se nalazi u prvom kvadrantu, prijeđena u pozitivnom smjeru.

6. Izračunajte

$$I = \int_K ye^{xy} dx + (x + xe^{xy}) dy$$

ako je K pozitivno orijentirana gornja polukružnica $x^2 + y^2 = 1$.

7. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int_K (2a - y) dx + x dy$$

ako je krivulja K cikloida dana jednadžbama $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

8. Pokažite da je polje

$$\vec{a} = \frac{yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}}{1 + x^2y^2z^2}$$

potencijalno i odredite potencijal. Izračunajte $\int_{(0,1,1)}^{(1,1,1)} \vec{a} \cdot d\vec{r}$.

9. Odredite konstante a , b i c tako da vektorsko polje

$$\vec{a} = (x + 2y + az)\vec{i} + (bx - 3y - z)\vec{j} + (4x + cy + 2z)\vec{k}$$

bude potencijalno.

10. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int_K y \operatorname{tg}^2 x \, dx + \operatorname{tg} x \, dy$$

ako je K kružnica $x^2 + (y + 1)^2 = 1$ prijeđena u pozitivnom smjeru.

11. Izračunajte

$$I = \int_K (y - z) \, dx + (z - x) \, dy + (x - z) \, dz$$

ako je krivulja K dio pravca od točke $A(1, -1, 2)$ do $B(2, 0, 1)$.

12. Izračunajte

$$I = \int_K (x^2 + y^2) \, dx + (x^2 - y^2) \, dy$$

ako je K dio krivulje $y = 1 - |1 - x|$, za $0 \leq x \leq 2$.

13. Pomoću Greenove formule izračunajte

$$I = \int_K y^3 \, dx + xy^2 \, dy,$$

gdje je K pozitivno orijentirana krivulja koja zatvara lik omeđen parabolama $y = x^2$ i $x = y^2$.

Rješenja:

1. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int_K (x - y) ds$$

ako je krivulja K kružnica $x^2 + y^2 = 3x$.

Krivulja K je kružnica $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ čija parametrizacija je dana sa:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos t, \\ y &= \frac{3}{2} \sin t. \end{aligned}$$

Računamo:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{-3}{2} \sin t\right)^2 + \left(\frac{3}{2} \cos t\right)^2} dt = \frac{3}{2} dt,$$

$$I = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} (1 + \cos t - \sin t) dt = \frac{9}{4} \cdot 2\pi = \frac{9\pi}{2}.$$

2. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int_K (x + y) ds$$

ako je krivulja K trokut s vrhovima $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ i $C(0, 0)$.

Integral je potrebno rastaviti na tri integrala tako da integriramo po svakoj stranici trokuta.

Stranica K_{CA} je dio x osi za $x \in [0, 1]$. Ovdje je $x = x$, $y = 0$, $ds = dx$.

Stranica K_{CB} je dio y osi za $y \in [0, 1]$. Ovdje je $x = 0$, $y = y$, $ds = dy$.

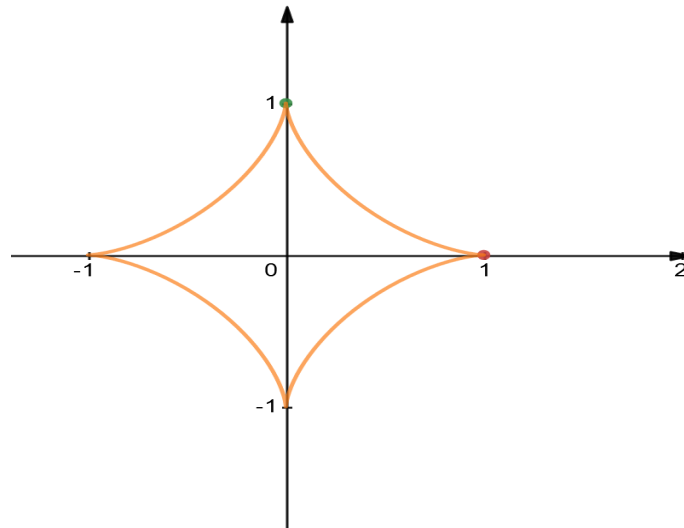
Stranica K_{AB} je dio pravca $y = 1 - x$ za $x \in [0, 1]$. Ovdje je $x = x$, $y = 1 - x$, $ds = \sqrt{2} dx$.

$$\begin{aligned} I &= I_{K_{CA}} + I_{K_{CB}} + I_{K_{AB}} = \int_0^1 x dx + \int_0^1 y dy + \int_0^1 \sqrt{2} dx \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

3. Izračunajte

$$I = \int_K \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) ds$$

ako je krivulja K astroida dana jednačbama $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.



Slika 1: Astroida ($a = 1$)

Prvo izračunajmo derivacije funkcija x i y :

$$x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t, \quad y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t,$$

a zatim je

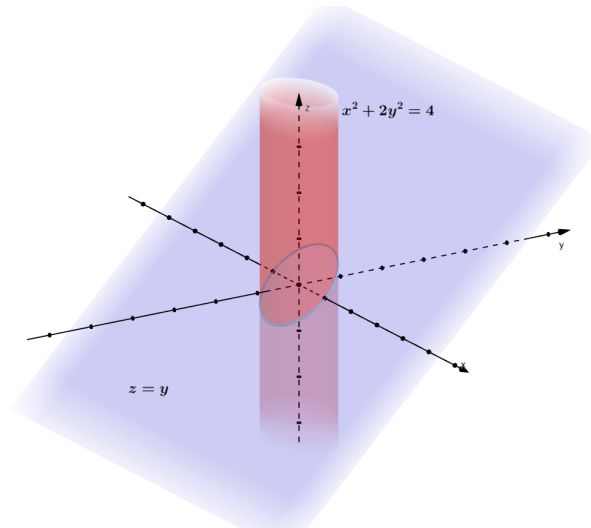
$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt \\ &= \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} dt \\ &= 3a \sin t \cos t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{4}{3}} (\cos^4 t + \sin^4 t) 3a \sin t \cos t dt \\ &= 12a^{\frac{7}{3}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t \sin t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t \cos t dt \right] = \dots = 4a^{\frac{7}{3}}. \end{aligned}$$

4. Izračunajte

$$I = \int_K (x^2 + y^2) \, ds$$

ako je krivulja K presjek ploha $x^2 + 2y^2 = 4$ i $z = y, y \geq 1$.



Slika 2: Presjek cilindra i ravnine

Projekcija prostorne krivulje K na xy ravninu je dio elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$. Parametrizirajmo projekciju i izrazimo z preko novih funkcija x i y :

$$x = 2 \cos t,$$

$$y = \sqrt{2} \sin t,$$

$$z = \sqrt{2} \sin t,$$

$$ds = \sqrt{4 \sin^2 t + 2 \cos^2 t + 2 \cos^2 t} \, dt = 2 \, dt.$$

Kako bismo pronašli granice za parametar t iskoristimo $y \geq 1$. Prema tome je $\sin t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, odnosno $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$. Sada je

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (4 \cos^2 t + 2 \sin^2 t) 2 \, dt = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (2 + 2 \cos^2 t) \, dt = \dots = 3\pi - 2.$$

5. Izračunajte vrijednost integrala

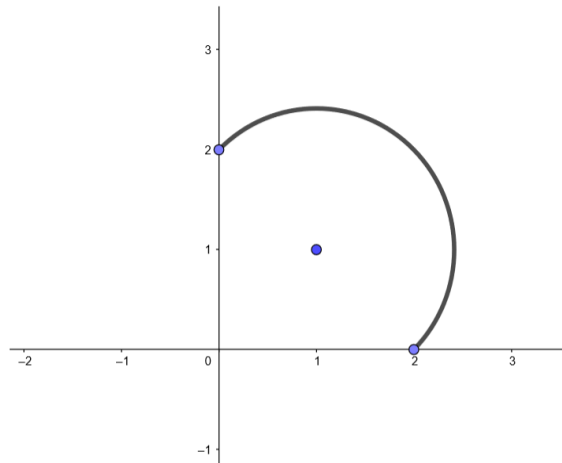
$$I = \int_K (y - 1) \, dx$$

ako je K dio krivulje $x^2 + y^2 = 2x + 2y$ koja se nalazi u prvom kvadrantu, prijeđena u pozitivnom smjeru.

Jednadžbu $x^2 + y^2 = 2x + 2y$ trebamo zapisati u standardnom obliku, tj. dopuniti izraze $x^2 - 2x$ i $y^2 - 2y$ do kvadrata binoma:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2.$$

Ovo je jednadžba kružnice sa središtem u točki $(1, 1)$ radijusa $\sqrt{2}$.



Slika 3: Dio kružnice u prvom kvadrantu

Promatramo samo dio kružnice koji se nalazi u prvom kvadrantu. Parametrizirajmo ga:

$$\begin{aligned} x - 1 &= \sqrt{2} \cos t, & dx &= -\sqrt{2} \sin t \, dt, \\ y - 1 &= \sqrt{2} \sin t, & dy &= \sqrt{2} \cos t \, dt. \end{aligned}$$

Potrebno je još odrediti granice za parametar t iz čega će biti jasno da se radi o dijelu kružnice u prvom kvadrantu. Za točku u kojoj kružnica presijeca x -os vrijedi da je $y = 0$. Uvrstimo $y = 0$ u parametrizaciju i dobijemo $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ pa je $t = \frac{-\pi}{4}$. Slično, za točku u kojoj kružnica presijeca y -os vrijedi da je $x = 0$ i $\cos t = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, a iz čega slijedi $t = \frac{3\pi}{4}$. Sada možemo računati vrijednost integrala I :

$$I = \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2} \sin t \left(-\sqrt{2} \sin t \right) dt = -2 \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2 t \, dt = - \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1 - \cos 2t) \, dt = \dots = -\pi.$$

6. Izračunajte

$$I = \int_K ye^{xy} \, dx + (x + xe^{xy}) \, dy$$

ako je K pozitivno orijentirana gornja polukružnica $x^2 + y^2 = 1$.

Parametrizacija pozitivno orijentirane jedinične centralne gornje polukružnice je dana sa:

$$\begin{aligned}x &= \cos t, & dx &= -\sin t dt, \\y &= \sin t, & dy &= \cos t dt, \quad t \in [0, \pi].\end{aligned}$$

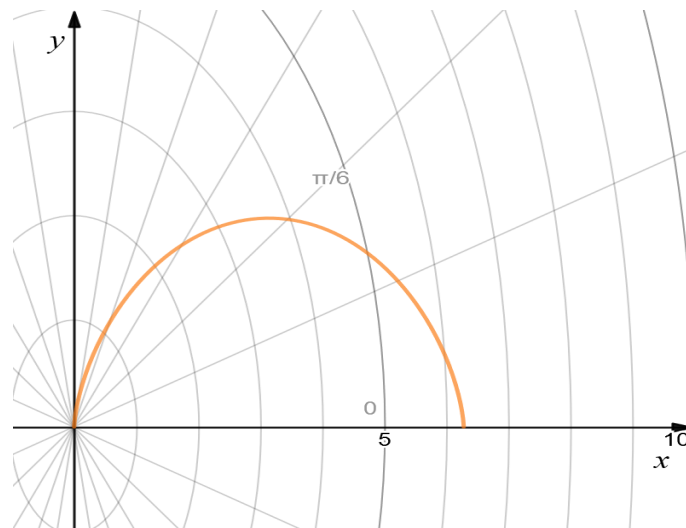
Sve uvrstimo u integral i računamo:

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\pi} \sin t e^{\sin t \cos t} (-\sin t) dt + \int_0^{\pi} \cos t \cos t dt + \int_0^{\pi} \cos t e^{\sin t \cos t} \cos t dt \\&= \left\{ \text{u prvom i zadnjem integralu izlučimo eksponencijalnu funkciju} \right\} \\&= \int_0^{\pi} e^{\sin t \cos t} (\cos^2 t - \sin^2 t) dt + \int_0^{\pi} \cos^2 t dt \\&= \int_0^{\pi} e^{\frac{1}{2} \sin 2t} \cos 2t dt + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2t) dt \\&= \left\{ \text{ uvedemo supstituciju } \frac{1}{2} \sin 2t = z \right\} = \dots = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

7. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int_K (2a - y) dx + x dy$$

ako je krivulja K cikloida dana jednačbama $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.



Slika 4: Cikloida ($a = 1$)

Budući da je jednačba krivulje već dana u parametarskom obliku kao i granice za t možemo odmah računati vrijednost integrala:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} [(2a - a + a \cos t) a (1 - \cos t) + a(t - \sin t) a \sin t] dt \\
 &= \int_0^{2\pi} [a^2 (1 + \cos t) (1 - \cos t) + a^2 (t \sin t - \sin^2 t)] dt \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t + t \sin t - \sin^2 t) dt \\
 &= a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = \left\{ \text{parcijalna integracija} \right\} = \dots = -2a^2\pi.
 \end{aligned}$$

8. Pokažite da je polje

$$\vec{a} = \frac{yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}}{1 + x^2y^2z^2}$$

potencijalno i odredite potencijal. Izračunajte $\int_{(0,1,1)}^{(1,1,1)} \vec{a} \cdot d\vec{r}$.

Vidimo da je

$$P = \frac{yz}{1 + x^2y^2z^2}, \quad Q = \frac{zx}{1 + x^2y^2z^2}, \quad R = \frac{xy}{1 + x^2y^2z^2}.$$

Provjerimo jesu li parcijalne derivacije u parovima jednake:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{z(1 + x^2y^2z^2) - yz2yx^2z^2}{(1 + x^2y^2z^2)^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{y(1 + x^2y^2z^2) - yz2zx^2y^2}{(1 + x^2y^2z^2)^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{x(1 + x^2y^2z^2) - zx2zx^2y^2}{(1 + x^2y^2z^2)^2}.$$

Zaključujemo da je polje potencijalno. Stoga integral polja \vec{a} ne ovisi o putu integracije. Potencijal $u(x, y, z)$ računamo prema

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y, z) dt + \int_{y_0}^y Q(x_0, u, z) du + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, v) dv + C$$

pa je

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= \int_0^x \frac{yz}{1+t^2y^2z^2} dt + \int_0^y \frac{z \cdot 0}{1+0^2u^2z^2} du + \int_0^z \frac{0 \cdot 0}{1+0^20^2v^2} dv + C \\
 &= \int_0^x \frac{yz}{1+t^2y^2z^2} dt + C = \left\{ \begin{array}{l} \text{supst. } tyz = k \\ yz dt = dk, t \rightarrow 0, k \rightarrow 0, t \rightarrow x, k \rightarrow xyz \end{array} \right\} \\
 &= \int_0^{xyz} \frac{dk}{1+k^2} + C = \arctg k \Big|_0^{xyz} = \arctg xyz + C
 \end{aligned}$$

i

$$\int_{(0,1,1)}^{(1,1,1)} \vec{a} d\vec{r} = u(1, 1, 1) - u(0, 1, 1) = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4}.$$

9. Odredite konstante a , b i c tako da vektorsko polje

$$\vec{a} = (x + 2y + az)\vec{i} + (bx - 3y - z)\vec{j} + (4x + cy + 2z)\vec{k}$$

bude potencijalno.

Možemo izračunati $\text{rot } \vec{a}$ i izjednačiti s $\vec{0}$ ili napraviti kao u prethodnom zadatku:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = b, \quad \text{pa je } b = 2, \\
 \frac{\partial P}{\partial z} = a, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 4, \quad \text{pa je } a = 4, \\
 \frac{\partial Q}{\partial z} = -1, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = c, \quad \text{pa je } c = -1.
 \end{aligned}$$

10. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int_K y \text{tg}^2 x dx + \text{tg} x dy$$

ako je K kružnica $x^2 + (y + 1)^2 = 1$ prijeđena u pozitivnom smjeru.

Budući da je K zatvorena, ravninska krivulja koja omeđuje područje D može se primjeniti Greenova formula.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2 x} - \text{tg}^2 x = 1,$$

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D dx dy.$$

Ovaj dvostruki integral računa površinu područja D , u ovom slučaju površinu kruga radijusa 1. Dakle,

$$I = \pi.$$

11. Izračunajte

$$I = \int_{\vec{K}} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - z) dz$$

ako je krivulja K dio pravca od točke $A(1, -1, 2)$ do $B(2, 0, 1)$.

Jednadžba pravca koji prolazi točkama A i B glasi:

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y + 1}{0 - (-1)} = \frac{z - 2}{1 - 2},$$

odnosno

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 2}{-1}.$$

U parametarskom obliku za $t \in [0, 1]$ je:

$$\begin{aligned} x &= t + 1, & dx &= dt, \\ y &= t - 1, & dy &= dt, \\ z &= -t + 2, & dz &= -dt. \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 [(t - 1 + t - 2) + (-t + 2 - t - 1) + (t + 1 + t - 2)(-1)] dt \\ &= \int_0^1 (-2t - 1) dt = -2. \end{aligned}$$

12. Izračunajte

$$I = \int_K (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$$

ako je krivulja K ... $y = 1 - |1 - x|$, za $0 \leq x \leq 2$.

Prvo zapišimo jednadžbu krivulje K prikladnije:

$$y = \begin{cases} x, & \text{ako je } 1 - x \geq 0 \\ 2 - x, & \text{ako je } 1 - x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{ako je } x > 1. \end{cases}$$

Sada je očito da moramo integral rastaviti u dva dijela; integral po dijelu pravca $y = x$ (označimo taj dio pravca K_1), za $x \in [0, 1]$ i integral po dijelu pravca $y = 2 - x$ (K_2), za $x \in [1, 2]$.

Parametrizacija za K_1 je dana sa:

$$\begin{aligned}x &= x, & dx &= dx, \\y &= x, & dy &= dx, \quad x \in [0, 1],\end{aligned}$$

a za K_2 :

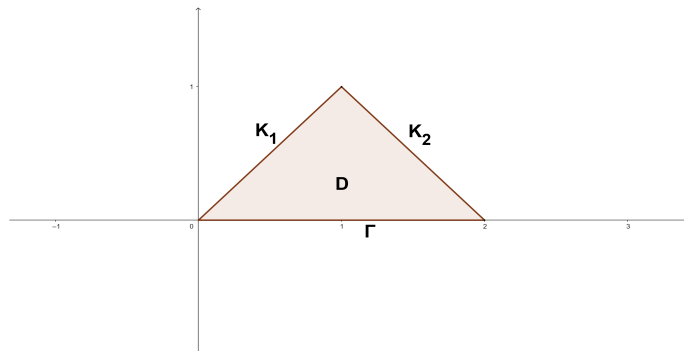
$$\begin{aligned}x &= x, & dx &= dx, \\y &= 2 - x, & dy &= -dx, \quad x \in [1, 2].\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}I &= \int_{K_1} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy + \int_{K_2} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy \\&= \int_0^1 2x^2 dx + \int_1^2 [(x^2 + 4 - 4x + x^2) - (x^2 - 4 + 4x - x^2)] dx \\&= \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^1 + \int_1^2 (2x^2 - 8x + 8) dx \\&= \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 8x \right) \Big|_1^2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Primjetimo da u zadatku orijentacija krivulje nije posebno naglašena. Mi smo ga riješili orijentirajući krivulju negativno (u smjeru gibanja kazaljke na satu).

Zadatak smo mogli riješiti i pomoću Greenove formule iako krivulja nije zatvorena, tako da primijenimo Greenovu formulu na područje D koje je trokut iznad x osi i od dobivenog rezultata oduzmemo $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, gdje je Γ dio x osi za $x \in [0, 2]$.



Slika 5: Područje D

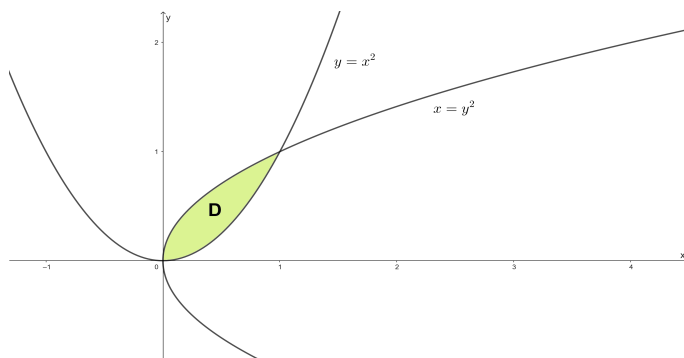
$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D (2x - 2y) \, dx \, dy - \int_{\Gamma} (x^2 + y^2) \, dx + (x^2 - y^2) \, dy \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^x (2x - 2y) \, dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} (2x - 2y) \, dy - \int_0^2 x^2 \, dx \\
 &= \frac{1}{3} + 1 - \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

Na ovaj način je konačni rezultat negativan jer je krivulja, prema pretpostavci Greenovog teorema, pozitivno orijentirana.

13. Pomoću Greenove formule izračunajte

$$I = \int_K y^3 \, dx + xy^2 \, dy,$$

gdje je K pozitivno orijentirana krivulja koja zatvara lik omeđen parabolama $y = x^2$ i $x = y^2$.



Slika 6: Područje D

Budući da je

$$P(x, y) = y^3 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2$$

$$Q(x, y) = xy^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$$

prema Greenovoj formuli vrijedi

$$\begin{aligned}
 I &= \int_K y^3 \, dx + xy^2 \, dy = \iint_D (y^2 - 3y^2) \, dx \, dy \\
 &= \iint_D (-2y^2) \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (-2y^2) \, dy \\
 &= -\frac{2}{3} \int_0^1 y^3 \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = -\frac{2}{3} \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} - x^6) \, dx = -\frac{6}{35}.
 \end{aligned}$$

4 PLOŠNI INTEGRAL

4.1 Osnovni pojmovi

Plošni integral prve vrste

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^2$ područje (otvoren i povezan skup) u xOy ravnini i $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija klase C^1 na D (f ima neprekidne parcijalne derivacije na D). Tada je skup

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

glatka ploha u prostoru \mathbb{R}^3 ($z = f(x, y)$) je njena eksplicitna jednačba).

Ako je S glatka ploha zadana eksplicitnom jednačbom $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, onda je njezina **površina**

$$P(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Neka je $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidno skalarno polje, a $S \subset \Omega$ glatka ploha zadana jednačbom $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, na zatvorenom području D omeđenom po dijelovima glatkom zatvorenom krivuljom. Tada dvostruki integral

$$\iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

nazivamo **plošnim integralom skalarnoga polja f po plohi S** (ili **plošnim integralom prve vrste**) i označavamo sa

$$\iint_S f dS.$$

Ako je ploha S po dijelovima glatka i sastavljena od konačno mnogo glatkih ploha S_1, \dots, S_n onda se njezin plošni integral prve vrste definira kao pripadni zbroj, tj.

$$\iint_S f dS = \iint_{S_1} f dS_1 + \dots + \iint_{S_n} f dS_n.$$

Plošni integral prve vrste je linearan:

$$\iint_S (\lambda f + \mu g) dS = \lambda \iint_S f dS + \mu \iint_S g dS.$$

gdje su $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidne funkcije, $S \subseteq X$ po dijelovima glatka ploha i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Plošni integral druge vrste

Neka je $\vec{a} : \Omega \rightarrow V_O^3$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ neprekidno vektorsko polje, a $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, jednačba orijentirane glatke plohe $S \subset \Omega$, pri čemu je D zatvoreno područje čiji je rub po dijelovima glatka zatvorena krivulja. Tada dvostruki integral

$$\iint_D \left(-a_x \frac{\partial g}{\partial x} - a_y \frac{\partial g}{\partial y} + a_z \right)_{(x,y,g(x,y))} dx dy$$

nazivamo **plošnim integralom vektorskoga polja \vec{a} po orijentiranoj plohi \hat{S}** (ili **plošnim integralom druge vrste**) i označavamo sa

$$\iint_{\hat{S}} \vec{a} \cdot d\vec{S} \quad \text{ili} \quad \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}_0 dS.$$

Plošni integral druge vrste se još naziva **tokom vektorskoga polja \vec{a} kroz plohu S** .

Neka su $\vec{a}, \vec{b} : \Omega \rightarrow V_O^3$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ neprekidna vektorska polja, $S \subset \Omega$ orijentirana po dijelovima glatka ploha i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada je:

- 1) $\iint_{\hat{S}} \vec{a} \cdot d\vec{S} = - \iint_{\hat{S}} \vec{a} \cdot d\vec{S};$
- 2) $\iint_{\hat{S}} (\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) \cdot d\vec{S} = \lambda \iint_{\hat{S}} \vec{a} \cdot d\vec{S} + \mu \iint_{\hat{S}} \vec{b} \cdot d\vec{S}.$

Zadamo li formalno jedinične vektore normale na S pomoću njihovih kosinusa smjera

$$\vec{n}_0 = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k},$$

pripadni plošni integral druge vrste ima zapis

$$\iint_{\hat{S}} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) dS.$$

Može se izvesti još jedan zapis plošnog integrala druge vrste. Neka su dani neprekidna skalarna polja $P, Q, R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ i orijentirana glatka ploha $S \subset \Omega$, te neka je

$$\vec{n}_0 = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$$

jedinični vektor normale na odabranu stranu S^+ plohe S . Tada je pripadni plošni integral druge vrste

$$\iint_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

Teorem o divergenciji: Neka je $\vec{a} : \Omega \rightarrow V_O^3$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ vektorsko polje klase C^1 na Ω , a $V \subseteq \Omega$ zatvoreno područje omeđeno po dijelovima glatkom zatvorenom plohom $\hat{S} \equiv \partial \hat{V}$ orijentiranom vanjskim normalama. Tada vrijedi Ostrogradski-Gaussova formula

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{a} \, dV = \iint_{\partial \hat{V}} \vec{a} \cdot d\vec{S}.$$

Ostrogradski-Gaussovu formulu možemo zapisati i u skalarnoj formi. Neka su $P, Q, R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ skalarna polja klase C^1 na okolini Ω zatvorenog područja $V \subset \mathbb{R}^3$, čiji je rub ∂V po dijelovima glatka zatvorena ploha. Tada je

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \iint_{\partial V} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, dS,$$

gdje su $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ kosinusi smjerova vanjske normale na plohu ∂V .

Ova formula omogućuje pretvaranje plošnog integrala po zatvorenoj plohi u trostruki integral po području koje ta ploha omeđuje.

Teorem o gradijentu: Neka je skalarno polje $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ klase C^1 na Ω . Tada vrijedi

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{grad} f \, dV &= \iint_{\partial V} f \vec{n}_0 \, dS \\ &= \vec{i} \iint_{\partial V} f \cos \alpha \, dS + \vec{j} \iint_{\partial V} f \cos \beta \, dS + \vec{k} \iint_{\partial V} f \cos \gamma \, dS. \end{aligned}$$

Teorem o rotaciji: Neka je vektorsko polje $\vec{a} : \Omega \rightarrow V_O^3$ klase C^1 na Ω . Tada vrijedi

$$\iiint_V \operatorname{rot} \vec{a} \, dV = \iint_{\partial V} \vec{n}_0 \times \vec{a} \, dS.$$

Teorem o Laplaceovom operatoru: Neka je skalarno polje $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ klase C^2 na Ω . Tada vrijedi

$$\iiint_V \Delta f \, dV = \iiint_V \operatorname{div} (\operatorname{grad} f) \, dV = \iint_{\partial V} (\operatorname{grad} f \cdot \vec{n}_0) \, dS.$$

Stokesova formula je poopćenje Greenove formule na prostorno vektorsko polje \vec{a} , plohu $S \subset \mathbb{R}^3$ i njezin rub ∂S .

Neka je dana orijentabilna ploha S čiji je rub po dijelovima glatka krivulja ∂S . Kažemo da su ploha i njezin rub koherentno orijentirani, ako, gledano s vrha vektora normale na plohu u nekoj

točki, orijentacija krivulje nalaže kretanje po krivulji u pozitivnom smjeru, tj. suprotno gibanju kazaljke na satu.

Stokesov teorem: Neka je $\vec{a} : \Omega \rightarrow V_O^3$ vektorsko polje klase C^1 na \mathbb{R}^3 , $\hat{S} \subset \Omega$ orijentirana po dijelovima glatka ploha, a $\partial\hat{S}$ koherentno joj orijentirani rub koji je po dijelovima glatka zatvorena krivulja. Tada vrijedi **Stokesova formula**

$$\iint_S \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 \, dS = \iint_{\hat{S}} \text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial\hat{S}} \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

I za Stokesovu formulu često se koristi skalarni zapis. Neka su $P, Q, R : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ skalarna polja klase C^1 na $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $S \subset \Omega$ po dijelovima glatka ploha s koherentno orijentiranim rubom ∂S koji je po dijelovima glatka zatvorena krivulja te $\cos \alpha$, $\cos \beta$ i $\cos \gamma$ kosinusi smjerova vektora normale na plohu S . Tada je

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial S} P \, dx + Q \, dy + R \, dz \\ &= \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) dS. \end{aligned}$$

4.2 Zadaci

1. Izračunajte

$$\iint_S y \, dS$$

gdje je S dio ravnine $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{3} = 1$ u prvom oktantu.

2. Izračunajte

$$\iint_S z \, dS$$

ako je S dio sfere $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 4$ za koji je $z \leq 2$.

3. Neka je S dio stošca $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ za koji je $x \leq 2$. Izračunajte

$$\iint_S y^2 \, dS.$$

4. Izračunajte

$$\iint_S (xy + z^2) \, dS$$

ako je S dio stošca $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ isječen cilindrom $x^2 + y^2 = 2x$.

5. Izračunajte

$$\iint_S (x + y + z) \, dS$$

ako je S dio plohe $x^2 + y^2 = 1$ koji se nalazi između ravnina $z = 0$ i $z = 2$.

6. Izračunajte površinu dijela plohe $z = 5x^2 + 5y^2$ za koji je $0 \leq z \leq 5$.

7. Izračunajte tok vektorskog polja

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z^2\vec{k}$$

kroz vanjsku stranu ruba tijela koje je omeđeno plohama $z = 2(x^2 + y^2)$ i $z = 2$.

8. Izračunajte

$$\iint_S (x - z) \, dydz + (2y + z) \, dx dz$$

ako je S gornji dio ravnine $x - 2y - z + 2 = 0$ isječen koordinatnim ravninama.

9. Izračunajte

$$\iint_S \sqrt{z} \, dydz$$

ako je S vanjska strana dijela plohe $z = x^2 + y^2$ za koji je $0 \leq z \leq 4$.

10. Izračunajte tok vektorskog polja

$$\vec{a} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$$

kroz vanjski dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ odsječen ravninom $z = 1$, a za $z \geq 1$.

11. Primjenom formule Gauss-Ostrogradskog nađite tok vektorskog polja

$$\vec{a} = x\vec{i} + 2y^2\vec{j} + 3z^2\vec{k}$$

po plohi koja omeđuje područje $V = \{(x, y, z) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq 1\}$.

12. Izračunajte

$$\iint_S x \, dydz + y \, dx dz + z \, dx dy$$

ako je S vanjska strana ruba tijela zadanog nejednakostima $z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ i $z \geq x^2 + y^2$.

13. Uz pomoć Stokesove formule izračunajte

$$I = \int_{\vec{K}} \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

vektorskog polja $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ po zatvorenoj krivulji K zadanoj kao sjecište ploha $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ i $x^2 + y^2 = z^2$, za $z \geq 0$.

14. Izračunajte cirkulaciju vektorskog polja

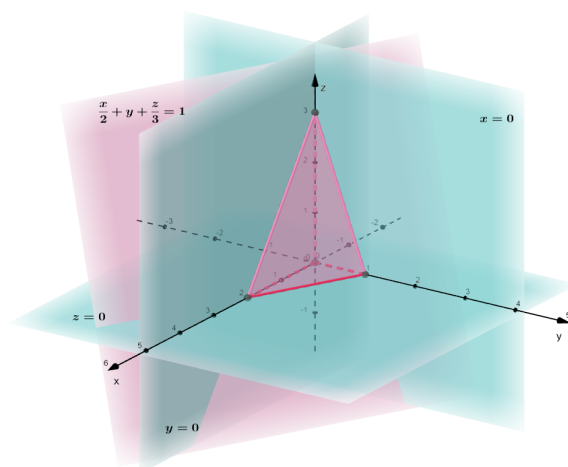
$$\vec{a} = zy^2\vec{i} + xz^2\vec{j} + yx^2\vec{k}$$

duž krivulje $K \dots \begin{cases} x = y^2 + z^2 \\ x = 9 \end{cases}$.

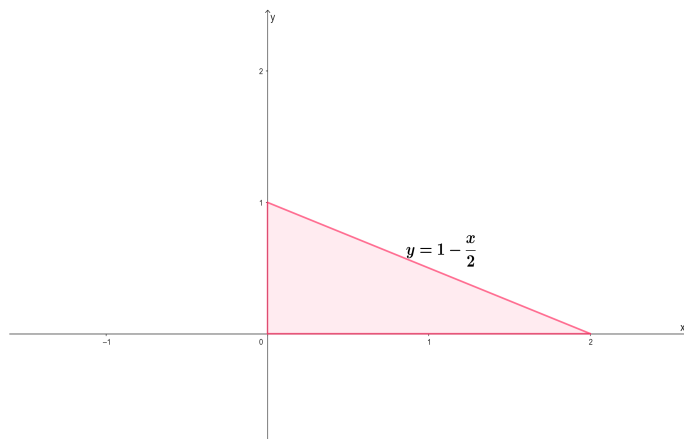
Rješenja:

1. Izračunajte

$$\iint_S y \, dS$$

gdje je S dio ravnine $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{3} = 1$ u prvom oktantu.

Slika 7: Dio ravnine isječen koordinatnim ravninama

Slika 8: Projekcija plohe S na xy ravninu

Jednadžbu plohe možemo zapisati eksplicitno kao $z = g(x, y) = 3 - \frac{3}{2}x - 3y$ te odrediti njenu projekciju S_{xy} na xy ravninu. Tada su granice za x i y :

$$0 \leq x \leq 2$$

$$0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}.$$

Element površine plohe je

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + (-3)^2} dx dy = \frac{7}{2} dx dy.$$

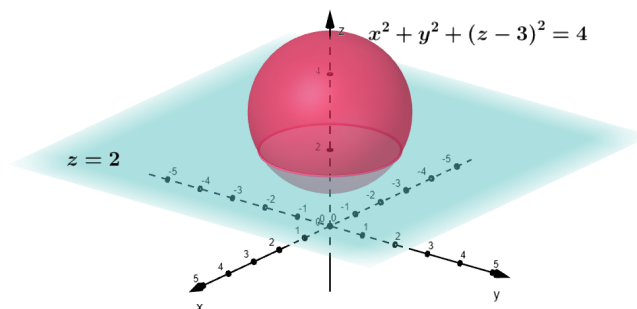
Sada je traženi integral

$$\iint_S y dS = \iint_{S_{xy}} y \cdot \frac{7}{2} dx dy = \frac{7}{2} \int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} y dy = \frac{7}{2} \int_0^2 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 dx = \frac{7}{6}.$$

2. Izračunajte

$$\iint_S z dS$$

ako je S dio sfere $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 4$ za koji je $z \leq 2$.



Slika 9: Presjek sfere i ravnine

Određimo projekciju S_{xy} plohe S na xy ravninu. Presjek sfere i ravnine $z = 2$ je:

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 4 \\ z = 2 \\ \hline x^2 + y^2 = 3 \end{array}$$

iz čega slijedi da je projekcija dana sa $S_{xy} \dots x^2 + y^2 \leq 3$.

Sada još trebamo z izraziti pomoću x i y :

$$(z-3)^2 = 4 - x^2 - y^2$$

$$z = 3 \pm \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Budući da je ploha dio donje polusfere biramo $z = 3 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Nadalje, jednadžbu plohe možemo zapisati implicitno ($F(x, y, z) = 0$) kao

$$x^2 + y^2 + (z-3)^2 - 4 = 0$$

pa računamo:

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} dx dy = \frac{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2(z-3))^2}}{|2(z-3)|} dx dy \\ &= \frac{\sqrt{4(x^2 + y^2 + (z-3)^2)}}{2|z-3|} dx dy = \frac{\sqrt{4 \cdot 4}}{2|3 - \sqrt{4 - x^2 - y^2} - 3|} dx dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dx dy. \end{aligned}$$

Sada je

$$I = \iint_S z dS = \iint_{S_{xy}} \left(3 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right) \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

Kako je $S_{xy} \dots x^2 + y^2 \leq 3$ prelazimo na polarne koordinate:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & 0 \leq r \leq \sqrt{3} \\ y &= r \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ J &= r \end{aligned}$$

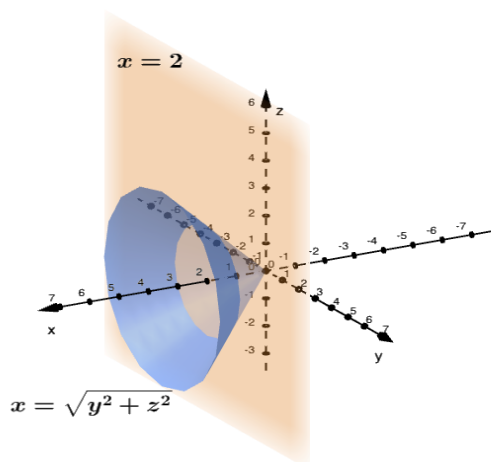
pa je

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \left(3 - \sqrt{4 - r^2}\right) \frac{2}{\sqrt{4 - r^2}} r dr = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{3r}{\sqrt{4 - r^2}} - r\right) dr \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left(-3\sqrt{4 - r^2} - \frac{r^2}{2}\right) \Big|_0^{\sqrt{3}} d\varphi = 6\pi. \end{aligned}$$

3. Neka je S dio stošca $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ za koji je $x \leq 2$. Izračunajte

$$\iint_S y^2 dS.$$

Jednadžbu plohe možemo zapisati eksplicitno kao $x = g(y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}$ te odrediti njenu projekciju S_{yz} na yz ravninu: $S_{yz} \dots y^2 + z^2 \leq 4$.



Slika 10: Presjek stošca i ravnine

Element površine plohe je

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2} dydz \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{2y}{2\sqrt{y^2 + z^2}}\right)^2 + \left(\frac{2z}{2\sqrt{y^2 + z^2}}\right)^2} dydz = \sqrt{2} dydz. \end{aligned}$$

Sada je

$$I = \iint_S y^2 dS = \iint_{S_{yz}} y^2 \sqrt{2} dydz.$$

Kako je $S_{yz} \dots y^2 + z^2 \leq 4$ prelazimo na polarne koordinate:

$$\begin{aligned} y &= r \cos \varphi & 0 \leq r \leq 2 \\ z &= r \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ J &= r \end{aligned}$$

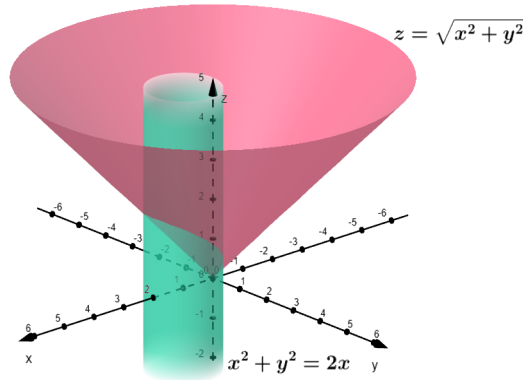
pa je

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (r \cos \varphi)^2 r dr = 4\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \\ &= 4\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = 4\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

4. Izračunajte

$$\iint_S (xy + z^2) dS$$

ako je S dio stošca $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ isječen cilindrom $x^2 + y^2 = 2x$.



Slika 11: Dio stošca isječen cilindrom

Ploha je zadana eksplicitno s $z = g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Računamo:

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} dx dy \\ &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2} dx dy. \end{aligned}$$

Možemo naći projekciju S_{xy} plohe S na xy ravninu tako da jednadžbu cilindra zapišemo u standardnom obliku (dopunimo izraze do kvadrata binoma):

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 &= 0 \\ (x - 1)^2 + y^2 &= 1, \end{aligned}$$

pa je projekcija dana sa $S_{xy} \dots (x - 1)^2 + y^2 \leq 1$. Sada je

$$I = \iint_S (xy + z^2) dS = \iint_{S_{xy}} \left(xy + \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \right) \sqrt{2} dx dy.$$

Kako je S_{xy} pomaknuti krug prelazimo na pomaknute polarne koordinate:

$$\begin{aligned} x - 1 &= r \cos \varphi & 0 \leq r \leq 1 \\ y &= r \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ J &= r \end{aligned}$$

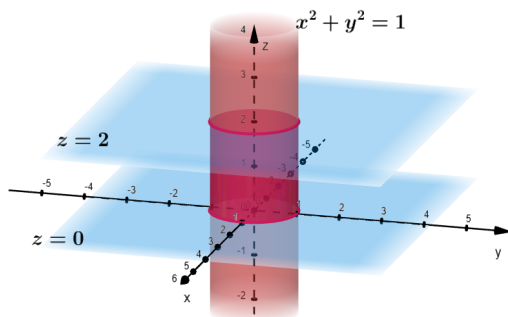
pa je

$$\begin{aligned}
 I &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 ((1+r\cos\varphi)r\sin\varphi + (1+r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2) r dr \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^2\sin\varphi + r^3\cos\varphi\sin\varphi + r + 2r^2\cos\varphi + r^3) dr \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}\sin\varphi + \frac{1}{4}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cos\varphi + \frac{1}{4} \right) d\varphi = \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi.
 \end{aligned}$$

5. Izračunajte

$$\iint_S (x + y + z) dS$$

ako je S dio plohe $x^2 + y^2 = 1$ koji se nalazi između ravnina $z = 0$ i $z = 2$.

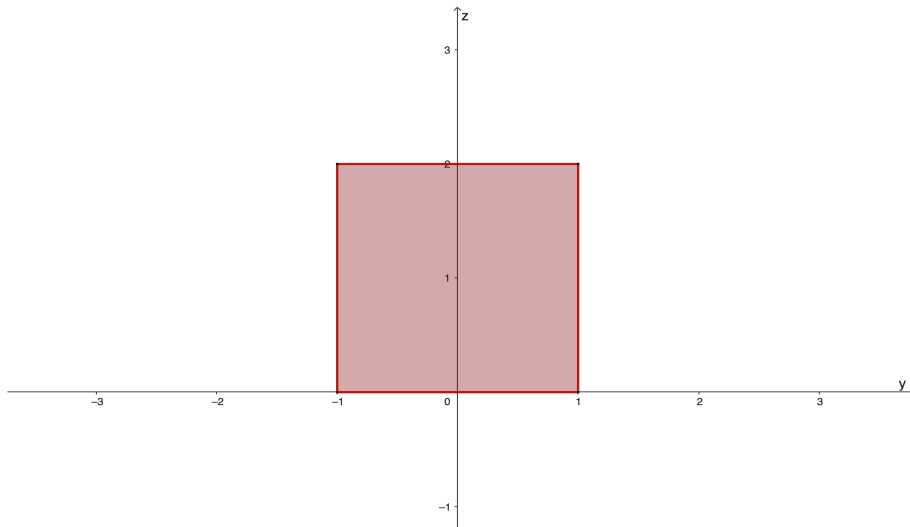


Slika 12: Dio cilindra između dvije ravnine

Projekcija plohe S na xy ravninu je krivulja. Stoga moramo odabrati projekciju na neku drugu koordinatnu ravninu.

Projekcija S_{yz} plohe S na yz ravninu je pravokutnik s vrhovima $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(-1, 2)$ i $(-1, 0)$. Uočimo, to je ujedno i projekcija plohe S_1 dobivene od plohe S za $x \geq 0$ i projekcija plohe S_2 dobivene od plohe S za $x \leq 0$. Stoga ćemo integral I računati kao zbroj plošnih integrala po dvije plohe, tj. $I = I_1 + I_2$:

$$1) S_1 \dots x = +\sqrt{1 - y^2}$$

Slika 13: Projekcija plohe S na yz ravninu

Iz implicitne jednadžbe plohe $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ računamo element površine plohe kao

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|} dydz = \frac{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 0^2}}{|2x|} dydz \\ &= \{x \geq 0\} = \frac{\sqrt{4(x^2 + y^2)}}{2x} dydz = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dydz. \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{S_1} (x + y + z) dS = \int_{-1}^1 dy \int_0^2 \left(\sqrt{1 - y^2} + y + z\right) \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dz \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \left(z\sqrt{1 - y^2} + yz + \frac{z^2}{2}\right) \Big|_0^2 dy = \int_{-1}^1 \frac{2\sqrt{1 - y^2} + 2y + 2}{\sqrt{1 - y^2}} dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(2 + \frac{2y}{\sqrt{1 - y^2}} + \frac{2}{\sqrt{1 - y^2}}\right) dy \\ &= \left(2y - \frac{2}{3}(1 - y^2)^{\frac{3}{2}} + 2 \arcsin y\right) \Big|_{-1}^1 = 4 + 2\pi. \end{aligned}$$

2) $S_2 \dots x = -\sqrt{1 - y^2}$

Iz implicitne jednadžbe plohe $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ računamo element površine

plohe kao

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|} dydz = \frac{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 0^2}}{|2x|} dydz \\ &= \{x \leq 0\} = \frac{\sqrt{4(x^2 + y^2)}}{-2x} dydz = \frac{1}{-\sqrt{1-y^2}} dydz. \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{S_2} (x + y + z) dS = \int_{-1}^1 dy \int_0^2 \left(-\sqrt{1-y^2} + y + z\right) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dz \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \left(-z\sqrt{1-y^2} + yz + \frac{z^2}{2}\right) \Big|_0^2 dy = \int_{-1}^1 \frac{-2\sqrt{1-y^2} + 2y + 2}{\sqrt{1-y^2}} dy \\ &= \int_{-1}^1 \left(-2 + \frac{2y}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\right) dy \\ &= \left(-2y - \frac{2}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}} + 2 \arcsin y\right) \Big|_{-1}^1 = -4 + 2\pi. \end{aligned}$$

Konačno,

$$I = I_1 + I_2 = 4 + 2\pi - 4 + 2\pi = 4\pi.$$

6. Izračunajte površinu dijela plohe $z = 5x^2 + 5y^2$ za koji je $0 \leq z \leq 5$.

$$P(S) = \iint_S dS.$$

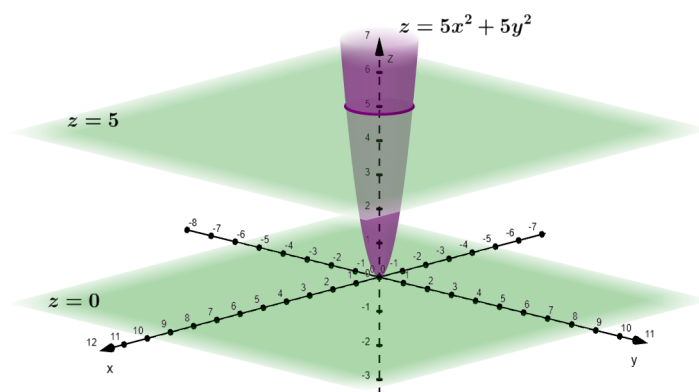
Ploha je zadana eksplicitno s $z = g(x, y) = 5x^2 + 5y^2$, a projekcija S_{xy} plohe S na xy ravninu je dana sa $S_{xy} \dots x^2 + y^2 \leq 1$.

Element površine plohe je

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + 100x^2 + 100y^2} dx dy.$$

Nakon uvođenja centralnih polarnih koordinata dobivamo:

$$P(S) = \iint_{S_{xy}} \sqrt{1 + 100x^2 + 100y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 100r^2} r dr = \frac{\pi}{150} \left(101^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

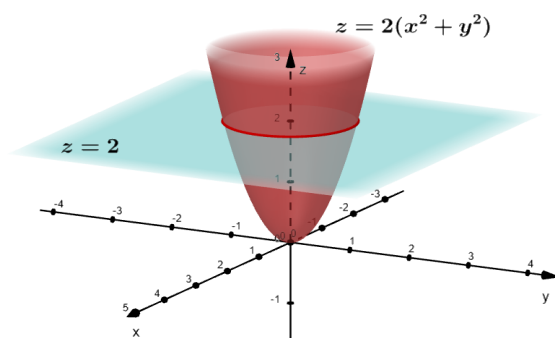


Slika 14: Dio paraboloida između dvije ravnine

7. Izračunajte tok vektorskog polja

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z^2\vec{k}$$

kroz vanjsku stranu ruba tijela koje je omeđeno plohami $z = 2(x^2 + y^2)$ i $z = 2$.



Slika 15: Tijelo omeđeno paraboloidom i ravninom

Rub tijela je sastavljen od dvije plohe: dijela paraboloida i dijela ravnine. Zato ćemo traženi integral izračunati kao zbroj dva integrala: I_1 za tok vektorskog polja kroz dio vanjske strane paraboloida i I_2 za tok vektorskog polja kroz dio gornje strane ravnine $z = 2$.

- 1) Ploha (paraboloid) je zadana eksplicitno s $z = g(x, y) = 2x^2 + 2y^2$. Presijecanjem paraboloida s ravninom $z = 2$ dobivamo projekciju S_{xy} plohe S na xy ravninu: $S_{xy} \dots x^2 + y^2 \leq 1$.

Normalu na plohu računamo prema izrazu

$$\vec{n}_0 = \pm \frac{-\frac{\partial g}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$$

stoga je

$$\vec{n}_0 = \pm \frac{-4x \vec{i} - 4y \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + 16x^2 + 16y^2}}.$$

S obzirom na to da normala s osi z zatvara tupi kut biramo predznak minus.

Element površine plohe je

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + 16x^2 + 16y^2} dx dy.$$

Računamo integral:

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}_0 dS \\ &= - \iint_S \frac{-4x \vec{i} - 4y \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{16x^2 + 16y^2 + 1}} (x \vec{i} + y \vec{j} + 2z^2 \vec{k}) dS \\ &= - \iint_{S_{xy}} \left(\frac{-4x^2 - 4y^2 + 2z^2}{\sqrt{16x^2 + 16y^2 + 1}} \right) \sqrt{1 + 16x^2 + 16y^2} dx dy \\ &= \iint_{S_{xy}} (4(x^2 + y^2) - 2(2x^2 + 2y^2)^2) dx dy. \end{aligned}$$

Kako je S_{xy} krug prelazimo na polarne koordinate:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & 0 \leq r \leq 1 \\ y &= r \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ J &= r \end{aligned}$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (4r^2 - 8r^4) r dr = 2\pi \left(r^4 - \frac{8}{6} r^6 \right) \Big|_0^1 = \frac{-2\pi}{3}.$$

- 2) Ravnina je zadana eksplicitno s $z = g(x, y) = 2$ i orijentirana je normalom $\vec{n}_0 = \vec{k}$. Projekcija na xy ravninu je ista kao u prvom slučaju, a element površine plohe je $dS = dx dy$. Ovdje je skalarni produkt $\vec{a} \cdot \vec{n}_0 = 2z^2$ pa je integral I_2 jednak

$$I_2 = \iint_S 2z^2 dS = \iint_{S_{xy}} 8 dx dy.$$

Budući da $\iint_{S_{xy}} dx dy$ računa površinu ravninskog lika jednostavno vidimo da je

$$I_2 = 8 \cdot P_{kruga} = 8\pi.$$

Konačno je

$$I = I_1 + I_2 = \frac{-2\pi}{3} + 8\pi = \frac{22}{3}\pi.$$

Napomena: zadatak se može riješiti i primjenom Teorema o divergenciji (formule Gauss-Ostrogradskog).

8. Izračunajte

$$\iint_S (x - z) \, dydz + (2y + z) \, dx dz$$

ako je S gornji dio ravnine $x - 2y - z + 2 = 0$ isječen koordinatnim ravninama.

Ploha je zadana eksplicitno s $z = g(x, y) = x - 2y + 2$. Projekcija na xy ravninu je trokut omeđen koordinatnim osima i pravcem $x - 2y + 2 = 0$.

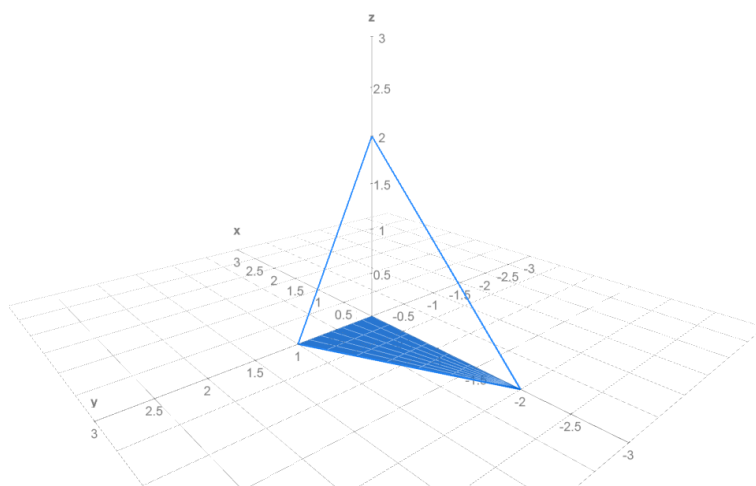
Normala na plohu glasi

$$\vec{n}_0 = \pm \frac{-\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{6}}.$$

S obzirom na to da normala s osi z zatvara šiljasti kut biramo predznak plus.

Element površine plohe je

$$dS = \sqrt{1 + 4 + 1} \, dx dy = \sqrt{6} \, dx dy.$$



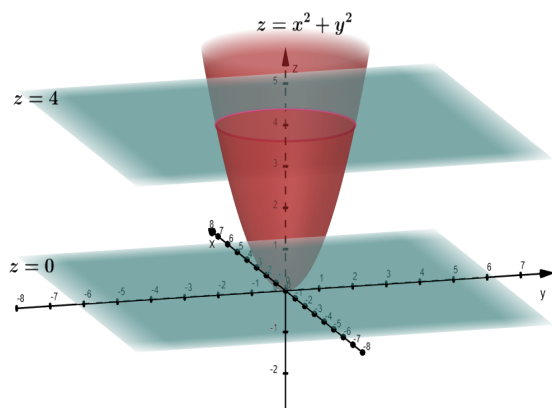
Slika 16: Dio ravnine isječen koordinatnim ravninama

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}_0 \, dS = \iint_S \left((x-z)\vec{i} + (2y+z)\vec{j} \right) \frac{-\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{6}} \, dS \\
 &= \iint_S (z-x+4y+2z) \frac{1}{\sqrt{6}} \, dS = \iint_{S_{xy}} (3(x-2y+2) - x + 4y) \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{6} \, dx \, dy \\
 &= \iint_{S_{xy}} (2x - 2y + 6) \, dx \, dy = \int_{-2}^0 dx \int_0^{1+\frac{x}{2}} (2x - 2y + 6) \, dy \\
 &= \int_{-2}^0 \left(2x \left(1 + \frac{x}{2} \right) - \left(1 + \frac{x}{2} \right)^2 + 6 \left(1 + \frac{x}{2} \right) \right) dx = 4.
 \end{aligned}$$

9. Izračunajte

$$\iint_S \sqrt{z} \, dy \, dz$$

ako je S vanjska strana dijela plohe $z = x^2 + y^2$ za koji je $0 \leq z \leq 4$.



Slika 17: Dio paraboloida između dvije ravnine

Zadatak ćemo riješiti na dva načina: po projekcijama i kao tok vektorskog polja.

1. način

$$I = \iint_{\vec{S}} \sqrt{z} \, dy \, dz = \pm \iint_{S_{yz}} \sqrt{z} \, dy \, dz.$$

Prvo odredimo projekciju plohe S na yz -ravninu, zatim x izrazimo pomoću y i z .

$x = +\sqrt{z - y^2}$ i $x = -\sqrt{z - y^2}$ su dvije plohe koje čine S i koje će imati istu projekciju na yz ravninu. Stoga ćemo integral riješiti kao $I = I_1 + I_2$, gdje ćemo integral I_1 izračunati u odnosu na plohu $x = +\sqrt{z - y^2}$, a integral I_2 u odnosu na plohu $x = -\sqrt{z - y^2}$.

Projekcija na yz -ravninu za obe plohe je dana sa: $S_{yz} \dots \begin{cases} -2 \leq y \leq 2, \\ y^2 \leq z \leq 4. \end{cases}$

Za računanje I_1 biramo predznak $+$ jer normala plohe $x = +\sqrt{z - y^2}$ zatvara šiljasti kut sa vektorom \vec{i} .

$$I_1 = + \iint_{S_{yz}} \sqrt{z} \, dydz = \int_{-2}^2 dy \int_{y^2}^4 \sqrt{z} \, dz = \frac{2}{3} \int_{-2}^2 (8 - y^3) \, dy = \frac{64}{3}.$$

Za računanje I_2 biramo predznak $-$ jer normala plohe $x = -\sqrt{z - y^2}$ zatvara tupi kut sa vektorom \vec{i} .

$$I_2 = - \iint_{S_{yz}} \sqrt{z} \, dydz = - \int_{-2}^2 dy \int_{y^2}^4 \sqrt{z} \, dz = -\frac{2}{3} \int_{-2}^2 (8 - y^3) \, dy = -\frac{64}{3}.$$

Konačno je

$$I = I_1 + I_2 = \frac{64}{3} - \frac{64}{3} = 0.$$

2. način

Integral I možemo izračunati kao tok vektorskog polja $\vec{w} = \sqrt{z}\vec{i}$.

$$I = \iint_{\vec{S}} \sqrt{z} \, dydz = \iint_{\vec{S}} \vec{w} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{w} \cdot \vec{n}_0 \, dS.$$

Ploha je zadana eksplicitno s $z = g(x, y) = x^2 + y^2$ i za normalu vrijedi $\vec{n}_0 = \pm \frac{-\frac{\partial g}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$.

Izabrat ćemo predznak $-$ jer \vec{n}_0 zatvara tupi kut sa vektorom \vec{k} .

$$\vec{n}_0 = -\frac{-2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1 + 4z}}$$

$$I = \iint_S \sqrt{z}\vec{i} \cdot \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1 + 4z}} \, dS = \iint_S \frac{2x\sqrt{z}}{\sqrt{1 + 4z}} \, dS$$

Dakle, preostaje riješiti plošni integral prve vrste.

Element površine plohe je

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy.$$

Računamo integral

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \frac{2x\sqrt{z}}{\sqrt{1+4z}} dS = \iint_{S_{xy}} \frac{2x\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}} \sqrt{1+4(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \iint_{S_{xy}} 2x\sqrt{x^2+y^2} dx dy. \end{aligned}$$

Projekcija plohe S na xy ravninu je krug $S_{xy} \dots x^2 + y^2 \leq 4$. Zato ćemo integral izračunati prelaskom na polarne koordinate:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & 0 \leq r \leq 2 \\ y &= r \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ J &= r \end{aligned}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 2r \cos \varphi \sqrt{r^2} r dr = 2 \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^2 r^3 dr = 0.$$

10. Izračunajte tok vektorskog polja

$$\vec{a} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$$

kroz vanjski dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ odsječene ravninom $z = 1$, a za $z \geq 1$.

Vrijedi:

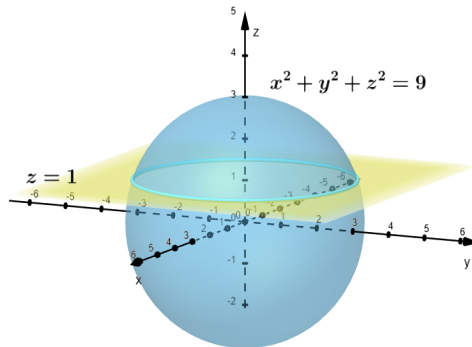
$$I = \iint_{\vec{S}} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}_0 dS.$$

Ploha je zadana implicitno s $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ pa \vec{n}_0 računamo kao

$$\vec{n}_0 = \pm \frac{\frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \pm \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}}.$$

Kut kojeg zatvaraju \vec{n}_0 i \vec{k} za $z \geq 1$ je šiljasti. Stoga biramo predznak $+$ i imamo

$$\vec{n}_0 = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{3}.$$



Slika 18: Sfera presječena ravninom

Računamo integral:

$$I = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n}_0 \, dS = \iint_S (xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}) \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{3} \, dS = \iint_S \frac{1}{3} (x^2z + y^2z + z^3) \, dS.$$

Preostaje riješiti plošni integral prve vrste. Odredimo projekciju plohe S na xy ravninu:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 9 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 = 8.$$

Nadalje, ploha je zadana implicitno pa dS računamo kao

$$dS = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} \, dx \, dy = \frac{\sqrt{4(x^2 + y^2 + z^2)}}{|2z|} \, dx \, dy.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} z^2 &= 9 - x^2 - y^2 \\ z &= \pm \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \end{aligned}$$

a biramo $z = +\sqrt{9 - x^2 - y^2}$ jer je ploha S dio gornje polusfere. Iz čega slijedi

$$dS = \frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy,$$

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_S \frac{1}{3} (x^2 z + y^2 z + z^3) dS \\
 &= \iint_S \frac{1}{3} \left(x^2 \sqrt{9 - x^2 - y^2} + y^2 \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \left(\sqrt{9 - x^2 - y^2} \right)^3 \right) \frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} dx dy.
 \end{aligned}$$

Kako je projekcija plohe S na xy ravninu krug $S_{xy} \dots x^2 + y^2 \leq 8$ koristit ćemo polarne koordinate za računanje integrala I :

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \varphi & 0 \leq r \leq 2\sqrt{2} \\
 y &= r \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\
 J &= r
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} \left((r^2 \cos^2 \varphi) \sqrt{9 - r^2} + (r^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{9 - r^2} + \left(\sqrt{9 - r^2} \right)^3 \right) \frac{r}{\sqrt{9 - r^2}} dr \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\sqrt{2}} (r^3 + r(9 - r^2)) dr = 72\pi.
 \end{aligned}$$

11. Primjenom formule Gauss-Ostrogradskog nađite tok vektorskog polja

$$\vec{a} = x\vec{i} + 2y^2\vec{j} + 3z^2\vec{k}$$

po plohi koja omeđuje područje $V = \{(x, y, z) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq 1\}$.

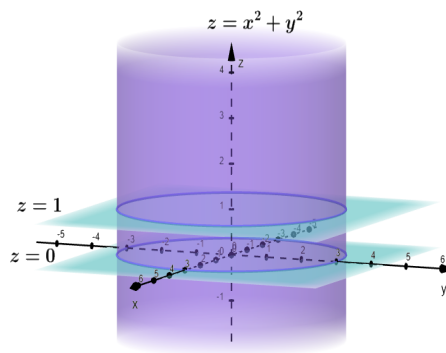
Vrijedi:

$$I = \iint_{\vec{S}} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV,$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = 1 + 4y + 6z.$$

Ploha S je dio kružnog cilindra, stoga ćemo za računanje integrala koristiti cilindrične koordinate:

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \varphi & 0 \leq r \leq 3 \\
 y &= r \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\
 z &= z & 0 \leq z \leq 1 \\
 J &= r
 \end{aligned}$$



Slika 19: Dio cilindra između dvije ravnine

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} \, dV = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 dr \int_0^1 (1 + 4r \sin \varphi + 6z) r \, dz \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (r + 4r^2 \sin \varphi + 3r) \, dr = \int_0^{2\pi} (18 + 36 \sin \varphi) \, d\varphi = 36\pi.
 \end{aligned}$$

12. Izračunajte

$$\iint_S x \, dydz + y \, dx dz + z \, dx dy$$

ako je S vanjska strana ruba tijela V zadanog nejednakostima $z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ i $z \geq x^2 + y^2$.

Vrijedi

$$I = \iint_{\vec{S}} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} \, dV,$$

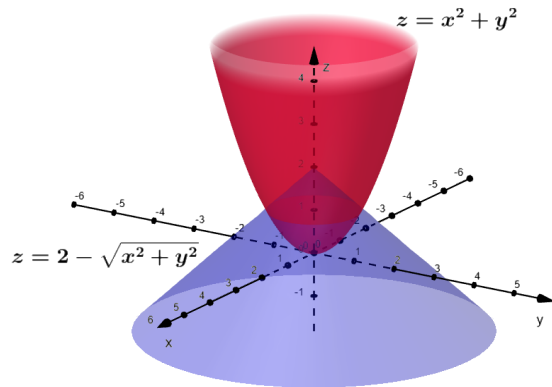
pri čemu je

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ i } \operatorname{div} \vec{a} = 3.$$

Sada je

$$I = \iiint_V 3 \, dV = 3 \iiint_V dV.$$

Ovaj trostruki integral računa tri puta volumen tijela V i za njegovo računanje koristimo cilindrične koordinate.



Slika 20: Tijelo sastavljeno od paraboloida i stošca

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \varphi & 0 \leq r \leq 1 \\
 y &= r \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\
 z &= z & x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ tj.} \\
 J &= r & r^2 \leq z \leq 2 - r
 \end{aligned}$$

$$I = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{2-r} r dz = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r(2-r-r^2) dr = \frac{5}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{5\pi}{2}.$$

13. Uz pomoć Stokesove formule izračunajte

$$I = \int_{\vec{K}} \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

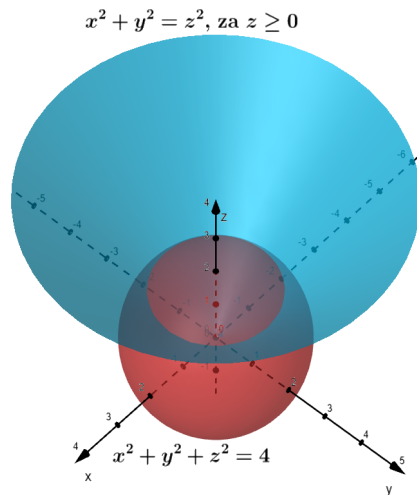
vektorskog polja $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ po zatvorenoj krivulji K zadanoj kao sjecište ploha $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ i $x^2 + y^2 = z^2$, za $z \geq 0$.

Krivulju K dobivamo iz $2z^2 = 4$, tj. $z = \sqrt{2}$ i $x^2 + y^2 = 2$.

Stokesova formula glasi: $\oint_{\vec{K}} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_{\vec{S}} \text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{S}$. Dakle, računamo tok vektorskog polja

$\text{rot } \vec{a}$ kroz plohu S , gdje za plohu S možemo uzeti dio ravnine $z = \sqrt{2}$ za koji je $x^2 + y^2 \leq 2$. Uočimo, za plohu S možemo uzeti sferu ili stožac, ali tada bi račun bio nešto složeniji.

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & z \end{vmatrix} = -2\vec{k}.$$



Slika 21: Presjek sfere i stošca

Sada je

$$I = \iint_{\vec{S}} \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 dS$$

pri čemu je

$$\vec{n}_0 = \pm \frac{-\frac{\partial g}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}} = \pm \vec{k},$$

jer je ploha S zadana eksplicitno s $z = g(x, y) = \sqrt{2}$.

Kada gledamo s vrha vektora normale (na plohu u nekoj točki) prema krivulji, orijentaciju plohe, odnosno predznak za normalu moramo izabrati tako da kretanje po krivulji bude u pozitivnom smjeru. Stoga biramo predznak $+$ i tada je

$$I = \iint_S \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 dS = \iint_S (-2) dS.$$

Nadalje,

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy = dx dy.$$

Projekcija plohe S na xy ravninu je dana s $x^2 + y^2 \leq 2$.

$$I = \iint_{\vec{S}} (-2) dS = -2 \iint_{\vec{S}_{xy}} dx dy.$$

Provedimo još prelazak na polarne koordinate:

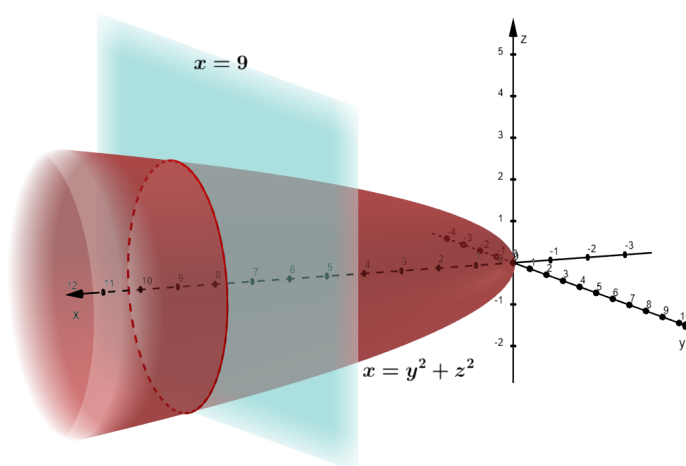
$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi & 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\y &= r \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\J &= r\end{aligned}$$

$$I = -2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r dr = -4\pi.$$

14. Izračunajte cirkulaciju vektorskog polja

$$\vec{a} = zy^2 \vec{i} + xz^2 \vec{j} + yx^2 \vec{k}$$

$$\text{duž krivulje } K \dots \begin{cases} x = y^2 + z^2 \\ x = 9 \end{cases}.$$



Slika 22: Presjek paraboloida i ravnine

Koristit ćemo Stokesovu formulu $\oint_{\vec{K}} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_{\vec{S}} \text{rot } \vec{a} \cdot d\vec{S}$. Dakle, trebamo odrediti tok vektorskog polja $\text{rot } \vec{a}$ kroz plohu

$$S \dots \begin{cases} x = y^2 + z^2 \\ 0 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

kojoj je K rub.

Računamo

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ zy^2 & xz^2 & yx^2 \end{vmatrix} = (x^2 - 2xz) \vec{i} + (y^2 - 2xy) \vec{j} + (z^2 - 2yz) \vec{k}$$

$$I = \iint_{\vec{S}} \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 dS$$

pri čemu je

$$\vec{n}_0 = \pm \frac{\vec{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial g}{\partial z} \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2}} = \pm \frac{\vec{i} - 2y\vec{j} - 2z\vec{k}}{\sqrt{1 + (2y)^2 + (2z)^2}},$$

jer je ploha S zadana eksplicitno s $x = g(y, z) = y^2 + z^2$.

Kada gledamo s vrha vektora normale (na plohu u nekoj točki) prema krivulji, orijentaciju plohe, odnosno predznak za normalu moramo izabrati tako da kretanje po krivulji bude u pozitivnom smjeru. Stoga nam treba unutrašnja orijentacija plohe te biramo predznak +:

$$\vec{n}_0 = + \frac{\vec{i} - 2y\vec{j} - 2z\vec{k}}{\sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2}},$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = \frac{x^2 - 2xz - 2y^3 + 4xy^2 - 2z^3 + 4z^2y}{\sqrt{1 + 4x}}.$$

Sada je

$$I = \iint_S \frac{x^2 - 2xz - 2y^3 + 4xy^2 - 2z^3 + 4z^2y}{\sqrt{1 + 4x}} dS.$$

Još trebamo izračunati plošni integral 1. vrste. Projekcija plohe S na yz ravninu je dana sa $S_{yz} \dots y^2 + z^2 \leq 9$. Element površine plohe je

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2} dydz = \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2} dydz$$

čijim uvrštavanjem u gornji integral dobivamo:

$$\iint_{S_{yz}} \frac{y^4 + 2y^2z^2 + z^4 - 2y^2z - 2z^3 - 2y^3 + 4y^4 + 4z^2y^2 - 2z^3 + 4z^2y}{\sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2}} \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2} dydz$$

$$= \iint_{S_{yz}} (y^4 + 2y^2z^2 + z^4 - 2y^2z - 2z^3 - 2y^3 + 4y^4 + 4z^2y^2 - 2z^3 + 4z^2y) dydz.$$

Prijeći ćemo na polarne koordinate:

$$y = r \cos \varphi \quad 0 \leq r \leq 3$$

$$z = r \sin \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$J = r$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (5r^4 \cos^4 \varphi + r^4 \sin^4 \varphi - 2r^3 \cos^3 \varphi - 4r^3 \sin^3 \varphi \\
 &\quad + 6r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - 2r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi + 4r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi) r dr \\
 &= \frac{5 \cdot 3^6}{6} \frac{3\pi}{4} + \frac{3^6}{6} \frac{3\pi}{4} + 3^6 \frac{\pi}{4} = 3^6 \pi = 729\pi.
 \end{aligned}$$

Napomena:

Ako za plohu S umjesto paraboloida izaberemo dio ravnine $x = 9$, onda je račun bitno jednostavniji jer je $\vec{n}_0 = \vec{i}$ i $\text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n}_0 = x^2 - 2xz$. Integral je tada

$$I = \iint_S (x^2 - 2xz) dS = \iint_S (9^2 - 18z) dS.$$

Projekcija je ista kao i u prehodnom pa je

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (81 - 18r \sin \varphi) r dr = 729\pi.$$

5 FOURIEROV RED

5.1 Osnovni pojmovi

Kažemo da je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **periodična funkcija** ako postoji $T > 0$ takav da za svaki x iz domene funkcije f vrijedi $f(x) = f(x + T)$. Broj T nazivamo periodom od f . Najmanji period (ako postoji) nazivamo osnovnim (ili temeljnim) periodom.

Trigonometrijski Fourierov red zadane periodične funkcije f s periodom 2π je red

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

kojemu su koeficijenti

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Koeficijente $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ nazivamo **Fourierovim koeficijentima** funkcije f . Pišemo $f(x) \sim S(x)$.

Trigonometrijski Fourierov red zadane periodične funkcije f s periodom $T = b - a$ je

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right),$$

kojemu su koeficijenti

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_a^b f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T} dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T} dx.$$

Kažemo da funkcija f zadovoljava **Dirichletove uvjete** na intervalu $[a, b]$ ako vrijedi:

- 1) f je po dijelovima neprekidna i njezini su prekidi prve vrste,
- 2) f je monotona ili ima najviše konačan broj strogih ekstrema.

Teorem (konvergenција po točkama) Neka je f po dijelovima glatka periodična funkcija s periodom 2π koja zadovoljava Dirichletove uvjete. Tada njezin Fourierov red

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

konvergira u svakoj točki $x \in [-\pi, \pi]$ i za sumu $S(x)$ reda vrijedi:

- (i) $S(x) = f(x)$, ako je f neprekidna u točki x ,
- (ii) $S(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$, ako je x točka prekida za f .

Ako je funkcija f definirana i parna na simetričnom intervalu $[-L, L]$, onda je $b_n = 0$ za svaki $n \geq 1$, tj. njezin Fourierov red sadrži samo kosinus članove i glasi

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Pri tome za a_n vrijedi

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0.$$

Kažemo da smo funkciju f razvili u **Fourierov red po kosinus funkcijama**.

Ako je funkcija f definirana i neparna na simetričnom intervalu $[-L, L]$, onda je $a_n = 0$ za svaki $n \geq 0$, tj. njezin Fourierov red sadrži samo sinus članove i glasi

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Pri tome za b_n vrijedi

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1.$$

Kažemo da smo funkciju f razvili u **Fourierov red po sinus funkcijama**.

Za Fourierove koeficijente vrijedi **Parsevalova jednakost**

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{2}{T} \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

5.2 Zadaci

1. Razvijte u Fourierov red funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle \frac{-\pi}{2}, 0 \rangle \\ \cos x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

2. Razvijte u Fourierov red po sinus funkcijama (neparno proširenje) funkciju $f(x) = x$ na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$.
3. Razvijte u Fourierov red po kosinus funkcijama (parno proširenje) funkciju $f(x) = \sin x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.
4. Razvijte u Fourierov red funkciju

$$f(x) = 2 - |x|$$

na intervalu $[-1, 1]$ te pomoću dobivenog razvoja izračunajte sumu reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

5. Razvijte u Fourierov red funkciju

$$f(x) = 2 \operatorname{sgn}(e^x - 1), \quad x \in [-3, 3],$$

a potom, koristeći taj razvoj izračunajte $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

6. Razvijte u Fourierov red po kosinus funkcijama funkciju $f(x) = \operatorname{sgn}(|x| - 1)$, $x \in [0, 2]$. Pomoću tog razvoja i Parsevalove jednakosti izračunajte sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.
7. Parno proširenje funkcije $f(x) = 1 - x$ zadane na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ razvijte u Fourierov red. Pomoću dobivenog razvoja izračunajte sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.
8. Funkcija $f(x) = x + \pi$ definirana je na intervalu $\langle -\pi, 0 \rangle$. Razvijte funkciju f u Fourierov red po sinus funkcijama te izračunajte sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Rješenja:

1. Razvijte u Fourierov red funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0 \rangle \\ \cos x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Funkcija f nije ni parna ni neparna. Računamo koeficijente a_0 , a_k , b_k :

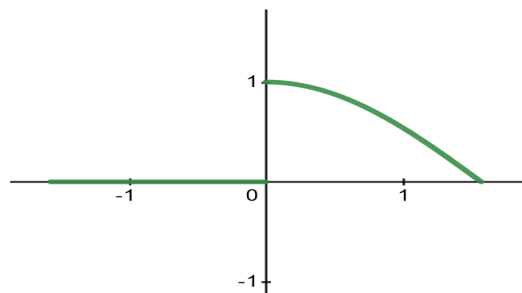
$$a_0 = \frac{2}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 0 dx}_0 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{2}{\pi} \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) = \frac{2}{\pi},$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \cos \frac{2k\pi x}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 0 \cdot \cos(2kx) dx}_0 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \cos(2kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\cos(x - 2kx) + \cos(x + 2kx)) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2k - 1)x dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2k + 1)x dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2k - 1} \sin(2k - 1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2k + 1} \sin(2k + 1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2k - 1} \sin(k\pi - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2k + 1} \sin(k\pi + \frac{\pi}{2}) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2k - 1} \left(\sin k\pi \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \cos k\pi \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2k + 1} \left(\sin k\pi \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \cos k\pi \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2k - 1} (-\cos k\pi) + \frac{1}{2k + 1} (\cos k\pi) \right] \\ &= \frac{\cos k\pi}{\pi} \left(-\frac{1}{2k - 1} + \frac{1}{2k + 1} \right) \\ &= \frac{(-1)^k}{\pi} \cdot \frac{-2k - 1 + 2k - 1}{4k^2 - 1} \\ &= \frac{-2(-1)^k}{\pi(4k^2 - 1)} \\ &= \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2 - 1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \sin \frac{2k\pi x}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} dx \\
&= \frac{2}{\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 0 \cdot \sin(2kx) dx}_0 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin(2kx) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\sin(2kx - x) + \sin(2kx + x)) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k-1)x dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k+1)x dx \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-1}{2k-1} \cos(2k-1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2k+1} \cos(2k+1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-1}{2k-1} \left[\cos(2k-1) \frac{\pi}{2} - 1 \right] - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2k+1} \left[\cos(2k+1) \frac{\pi}{2} - 1 \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2k+1+2k-1}{4k^2-1} \\
&= \frac{4k}{\pi(4k^2-1)}.
\end{aligned}$$

Fourierov red funkcije f glasi:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \cos(2kx) + \frac{4k}{\pi(4k^2-1)} \sin(2kx) \right).$$

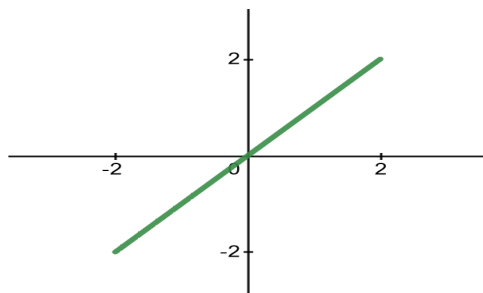


Slika 23: Graf funkcije (zadatak 1.)

2. Razvijte u Fourierov red po sinus funkcijama (neparno proširenje) funkciju $f(x) = x$ na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$.

Potrebno je definirati proširenje na intervalu $\langle -2, 0 \rangle$, a kako želimo dobiti neparnu funkciju koristimo $f(x) = -f(-x)$. Što je u ovom slučaju $f(x) = -f(-x) = -(-x) = x$ pa je proširenje funkcije f dano s

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle 0, 2 \rangle \\ x, & x \in \langle -2, 0 \rangle \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



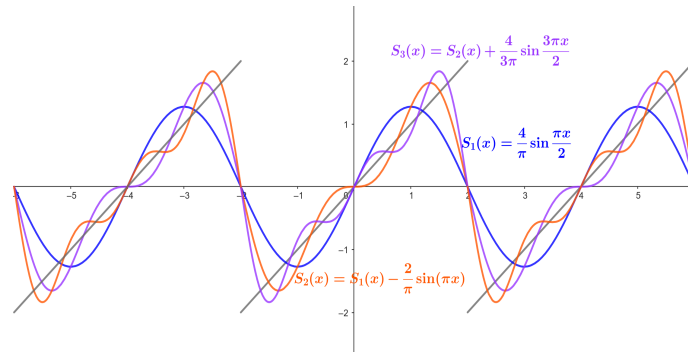
Slika 24: Graf neparnog proširenja funkcije (zadatak 2.)

Proširenje je neparno iz čega slijedi $a_0 = 0$, $a_k = 0$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, a koeficijente b_k računamo:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{2+2} \int_{-2}^2 \underbrace{f(x) \cdot \sin \frac{2k\pi x}{2+2}}_{\text{parna}} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^2 x \cdot \sin \frac{k\pi x}{2} dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = x \quad dv = \sin \frac{k\pi x}{2} dx \\ du = dx \quad v = \frac{-2}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{2} \end{array} \right\} \\ &= \frac{-2x}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^2 + \frac{2}{k\pi} \int_0^2 \cos \frac{k\pi x}{2} dx \\ &= \frac{-4}{k\pi} \cos k\pi + \frac{2 \cdot 0}{k\pi} \cos 0 + \frac{4}{k^2\pi^2} \underbrace{\sin \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^2}_0 \\ &= \frac{-4}{k\pi} \cdot (-1)^k \\ &= \frac{4}{k\pi} \cdot (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Fourierov red funkcije f glasi:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\pi} \cdot (-1)^{k+1} \sin \frac{k\pi x}{2}.$$

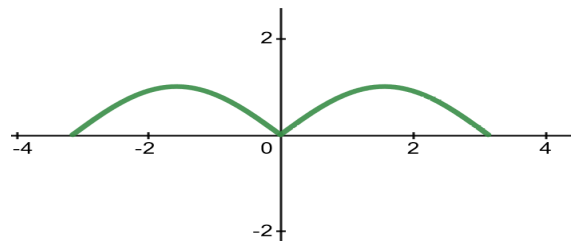


Slika 25: Prve tri aproksimacije funkcije preko njezinog Fourierovog reda (zadatak 2.)

3. Razvijte u Fourierov red po kosinus funkcijama (parno proširenje) funkciju $f(x) = \sin x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Potrebno je definirati proširenje na intervalu $\langle -\pi, 0 \rangle$, a kako želimo dobiti parnu funkciju koristimo $f(x) = f(-x)$. Što je u ovom slučaju $f(x) = f(-x) = \sin(-x) = -\sin x$ pa je proširenje funkcije f dano s

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \langle 0, \pi \rangle \\ -\sin x, & x \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$



Slika 26: Graf parnog proširenja funkcije (zadatak 3.)

Proširenje je parno iz čega slijedi $b_k = 0$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, a koeficijente a_0 i a_k računamo:

$$a_0 = \frac{2}{\pi + \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{parna}} dx = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{-2}{\pi} \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{-2}{\pi} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{4}{\pi},$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi + \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \cdot \cos \frac{2k\pi x}{\pi + \pi}}_{\text{parna}} dx \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos kx dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\sin(x + kx) + \sin(x - kx)) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(k+1)x dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(k-1)x dx \\
&\stackrel{k \neq 1}{=} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-1}{k+1} \cos(k+1)x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{k-1} \cos(k-1)x \Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-1}{k+1} [\cos(k+1)\pi - 1] + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{k-1} [\cos(k-1)\pi - 1] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-1}{k+1} (\cos k\pi \cdot \cos \pi - \sin k\pi \cdot \sin \pi - 1) + \frac{1}{k-1} (\cos k\pi \cdot \cos \pi + \sin k\pi \cdot \sin \pi - 1) \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-1}{k+1} (-\cos k\pi - 1) + \frac{1}{k-1} (-\cos k\pi - 1) \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{k+1} (\cos k\pi + 1) - \frac{1}{k-1} (\cos k\pi + 1) \right] \\
&= \frac{\cos k\pi + 1}{\pi} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1} \right) \\
&= \frac{(-1)^k + 1}{\pi} \cdot \frac{k-1-k-1}{k^2-1} \\
&= \frac{-2[(-1)^k + 1]}{\pi(k^2-1)} \\
&= \begin{cases} \frac{-4}{\pi(4n^2-1)}, & k = 2n, n \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2n-1, n \in \mathbb{N}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Pri računanju koeficijenata a_k javlja se razlomak nazivnika $k-1$. Stoga su gornjim računom obuhvaćeni koeficijenti za koje je $k \neq 1$ pa je koeficijent a_1 potrebno izračunati zasebno:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{\pi + \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \cdot \cos \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi \cdot x}{\pi + \pi}}_{\text{parna}} dx = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} \sin x \cdot \cos x dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \cos 2x \Big|_0^{\pi} = \frac{-1}{2\pi} (\cos 2\pi - \cos 0) = 0.
\end{aligned}$$

Fourierov red funkcije f glasi:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{-4}{\pi(4n^2 - 1)}}_{a_{2n}} \cos 2nx.$$

4. Razvijte u Fourierov red funkciju

$$f(x) = 2 - |x|$$

na intervalu $[-1, 1]$ te pomoću dobivenog razvoja izračunajte sumu reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Funkcija f je parna iz čega slijedi $b_k = 0$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, a koeficijente a_0 i a_k računamo:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{2} \int_{-1}^1 \underbrace{f(x)}_{\text{parna}} dx = 1 \cdot 2 \int_0^1 (2-x) dx = 3, \\ a_k &= \frac{2}{2} \cdot 2 \int_0^1 (2-x) \cos \frac{(2k\pi x)}{2} dx \\ &= 2 \int_0^1 (2-x) \cos k\pi x dx = \begin{cases} u = 2-x & dv = \cos k\pi x dx \\ du = -dx & v = \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x \end{cases} \\ &= 2 \frac{2-x}{k\pi} \sin(k\pi x) \Big|_0^1 + \frac{2}{k\pi} \int_0^1 \sin(k\pi x) dx \\ &= \frac{-2}{k^2 \pi^2} \cos(k\pi x) \Big|_0^1 \\ &= \frac{-2}{k^2 \pi^2} \cdot [(-1)^k - 1] \\ &= \begin{cases} 0, & k = 2n, n \in \mathbb{N} \\ \frac{4}{\pi^2(2n-1)^2}, & k = 2n-1, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Fourierov red funkcije f glasi:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x = \frac{3}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)\pi x.$$

Primijetimo, u gornjem izrazu smo pomakli indeks sume. Nadalje, kako bismo izračunali traženu sumu zadanog reda moramo u dobiveni Fourierov razvoj funkcije f uvrstiti točku iz intervala $[-1, 1]$ takvu da red dobiven iz razvoja i zadani red budu jednaki do na konstantu.

Također je potrebno odrediti i funkcijsku vrijednost od f u toj točki. Odabirom $x = 0$ dobivamo $f(0) = 2$ i

$$f(0) = \frac{3}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

odnosno

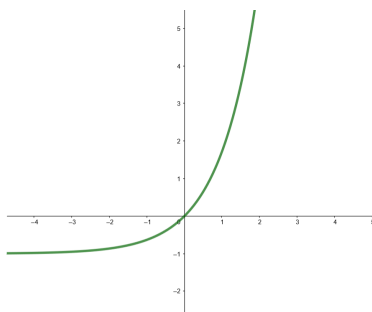
$$2 = \frac{3}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

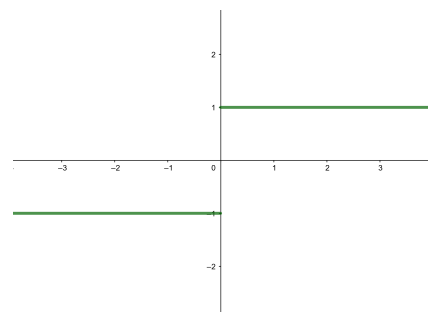
5. Razvijte u Fourierov red funkciju

$$f(x) = 2 \operatorname{sgn}(e^x - 1), \quad x \in [-3, 3],$$

a potom, koristeći taj razvoj izračunajte $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.



(a) Graf funkcije $g(x) = e^x - 1$



(b) Graf funkcije $h(x) = \operatorname{sgn}(e^x - 1)$

Slika 27: Grafovi pomoćnih funkcija (zadatak 5.)

Funkcija *predznak* ili *signum* definirana je na sljedeći način:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Funkcija f je neparna iz čega slijedi da je $a_k = 0$, za svaki $k \in \mathbb{N}_0$, a koeficijente b_k

računamo:

$$\begin{aligned}
 b_k &= 2 \cdot \frac{2}{6} \int_0^3 2 \cdot \sin \frac{2k\pi x}{6} dx \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^3 \sin \frac{k\pi x}{3} dx \\
 &= \frac{-4}{3} \cdot \frac{3}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{3} \Big|_0^3 \\
 &= \frac{-4}{k\pi} (\cos k\pi - \cos 0) \\
 &= \frac{-4}{k\pi} [(-1)^k - 1] \\
 &= \begin{cases} \frac{8}{\pi(2n-1)}, & k = 2n - 1, n \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2n, n \in \mathbb{N}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Fourierov red funkcije f glasi:

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{3} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi}{3} x.$$

Specijalno, za $x = \frac{3}{2}$ dobivamo

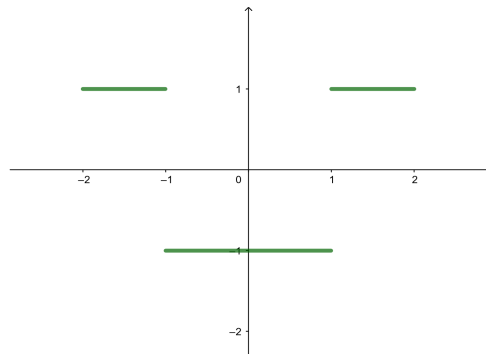
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

odnosno

$$\begin{aligned}
 2 &= \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \\
 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} &= \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

6. Razvijte u Fourierov red po kosinus funkcijama funkciju $f(x) = \operatorname{sgn}(|x| - 1)$, $x \in [0, 2]$.

Pomoću tog razvoja i Parsevalove jednakosti izračunajte sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.



Slika 28: Graf parnog proširenja funkcije (zadatak 6.)

Za neparno proširenje funkcije f je $b_k = 0$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, pa računamo:

$$a_0 = \frac{2}{4} \int_{-2}^2 \underbrace{f(x)}_{\text{parna}} dx = 2 \cdot \frac{2}{4} \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (-1) dx + \int_1^2 1 dx = 0,$$

$$\begin{aligned} a_k &= 2 \cdot \frac{2}{4} \int_0^2 f(x) \cos \frac{2k\pi x}{4} dx \\ &= \int_0^1 \left(-\cos \frac{k\pi x}{2} \right) dx + \int_1^2 \cos \frac{k\pi x}{2} dx \\ &= \frac{-2}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^1 + \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{2} \Big|_1^2 = \frac{-4}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} \\ &= \begin{cases} 0, & k = 2n, n \in \mathbb{N} \\ \frac{-4(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi}, & k = 2n-1, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Fourierov red funkcije f glasi:

$$f(x) = \frac{-4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

Iz Parsevalove jednakosti slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{2}{4} \int_{-2}^2 (f(x))^2 dx &= \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \\ 2 &= \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

7. Parno proširenje funkcije $f(x) = 1 - x$ zadane na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ razvijte u Fourierov red.

Pomoću dobivenog razvoja izračunajte sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.

Za parno proširenje funkcije f je $b_k = 0$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, pa računamo:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{1 - (-1)} \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 (1 - x) dx = 1, \\ a_k &= \frac{2}{1 - (-1)} \int_{-1}^1 f(x) \cos \frac{2k\pi x}{1 - (-1)} dx \\ &= 2 \int_0^1 (1 - x) \cos(k\pi x) dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = 1 - x \quad dv = \cos(k\pi x) dx \\ du = -dx \quad v = \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi x) \end{array} \right\} \\ &= 2 \left[\frac{1-x}{k\pi} \sin(k\pi x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{-1}{k\pi} \sin(k\pi x) dx \right] \\ &= 2 \left[\frac{1-1}{k\pi} \sin(k\pi) - \frac{1-0}{k\pi} \sin 0 + \frac{1}{k\pi} \frac{-1}{k\pi} \cos(k\pi x) \Big|_0^1 \right] \\ &= \frac{-2}{k^2 \pi^2} (\cos(k\pi) - \cos 0) \\ &= \frac{-2}{k^2 \pi^2} [(-1)^k - 1] \\ &= \begin{cases} 0, & k = 2n, n \in \mathbb{N} \\ \frac{4}{(2n-1)^2 \pi^2}, & k = 2n-1, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

Fourierov red funkcije f glasi:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{k^2 \pi^2} ((-1)^k - 1) \cos(k\pi x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2 \pi^2} \cos((2n-1)\pi x).$$

Kako bi izračunali sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ primijenit ćemo Parsevalovu jednakost

$$\begin{aligned} \frac{2}{1 - (-1)} \int_{-1}^1 (f(x))^2 dx &= \frac{1^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{(2n-1)^2 \pi^2} \right)^2 \\ 2 \int_0^1 (1-x)^2 dx &= \frac{1}{2} + \frac{16}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \\ \frac{2}{3} &= \frac{1}{2} + \frac{16}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} &= \frac{\pi^4}{96}. \end{aligned}$$

8. Funkcija $f(x) = x + \pi$ definirana je na intervalu $(-\pi, 0)$. Razvijte funkciju f u Fourierov red po sinus funkcijama te izračunajte sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Za neparno proširenje funkcije f je $a_k = 0$, za svaki $k \in \mathbb{N}_0$, pa računamo:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi - (-\pi)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \frac{2k\pi x}{\pi - (-\pi)} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx. \\ &= \frac{1}{\pi} 2 \int_{-\pi}^0 (x + \pi) \sin(kx) dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = x + \pi \quad dv = \sin(kx) dx \\ du = dx \quad v = \frac{-1}{k} \cos(kx) \end{array} \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-(x + \pi)}{k} \cos(kx) \Big|_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \frac{-1}{k} \cos(kx) dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\pi}{k} \cos 0 - 0 + \frac{1}{k} \frac{1}{k} \sin(kx) \Big|_{-\pi}^0 \right] \\ &= \frac{-2}{k}. \end{aligned}$$

Fourierov red funkcije f glasi:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{k} \sin(kx).$$

Kako bi izračunali sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ koristit ćemo Parsevalovu jednakost

$$\frac{2}{\pi - (-\pi)} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{k}\right)^2$$

$$\frac{1}{\pi} 2 \int_{-\pi}^0 (x + \pi)^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$$

$$\frac{2\pi^2}{3} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6 FOURIEROV INTEGRAL

6.1 Osnovni pojmovi

Teorem Ako je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ po dijelovima glatka na svakom konačnom intervalu i apsolutno integrabilna, onda postoji njezin Fourierov integral i vrijedi

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda(x - \xi) d\xi = \begin{cases} f(x), & \text{ako je } f \text{ neprekinuta u } x, \\ \frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)], & \text{ako je } f \text{ prekinuta u } x. \end{cases}$$

Neka funkcija f zadovoljava uvjete prethodnog Teorema i neka je \tilde{f} funkcija definirana sa

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ako je } f \text{ neprekinuta u } x, \\ \frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)], & \text{ako je } f \text{ prekinuta u } x. \end{cases}$$

Tada za svaki x vrijedi

$$\tilde{f}(x) = \int_0^{\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda.$$

Ovaj integral nazivamo **Fourierovim integralom** funkcije f .

Funkcije

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \quad \text{i} \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi$$

nazivamo **kosinusnim** i **sinusnim spektrom**, redom, funkcije f .

Parna funkcija nema sinusnog spektra, tj. $B(\lambda) = 0$ i

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \quad A(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi.$$

Neparna funkcija nema kosinusnog spektra, tj. $A(\lambda) = 0$ i

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \quad B(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi.$$

Funkciju \hat{f} definiranu sa

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} f(\xi) d\xi$$

nazivamo **Fourierovim transformatom** funkcije f , a obrnuta veza je dana sa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \hat{f}(\lambda) d\lambda.$$

Preslikavanje koje funkciji f pridružuje funkciju \hat{f} nazivamo **Fourierovom transformacijom**, a inverzno preslikavanje **inverznom Fourierovom transformacijom**.

6.2 Zadaci

1. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in \langle -2, 2 \rangle \\ 0, & x \notin \langle -2, 2 \rangle. \end{cases}$$

2. Prikažite Fourierovim integralom neparno proširenje funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in \langle 0, 2 \rangle \\ 0, & x \in [2, \infty) \end{cases}$$

te odredite

$$I = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin^2 2t}{t^2} - \frac{\sin 2t}{t} - \frac{\sin 4t}{2t} \right) dt.$$

3. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \left(\frac{1}{9} - x^2 \right), & x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

te odredite

$$I = \int_0^{\infty} \left(-\frac{\sin t}{t} + \frac{2 \sin \frac{t}{3}}{t} \right) dt.$$

4. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cos \frac{x}{2}, & x \in [-\pi, \pi] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

te odredite

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos \pi t}{1 - 4t^2} dt.$$

5. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

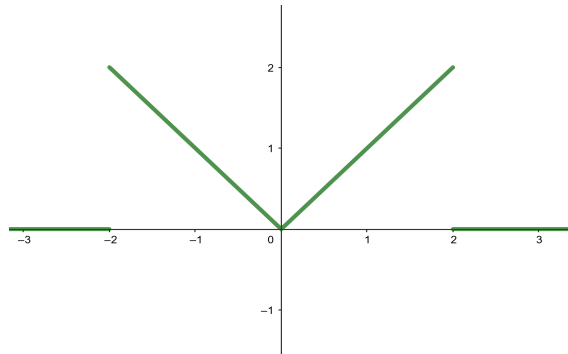
te odredite

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} (4 \cos t - 1) dt.$$

Rješenja:

1. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in \langle -2, 2 \rangle \\ 0, & x \notin \langle -2, 2 \rangle. \end{cases}$$



Slika 29: Graf funkcije (zadatak 1.)

Funkcija f je parna iz čega slijedi da je $B(\omega) = 0$. Potrebno je odrediti kosinusni spektar $A(\omega)$:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^2 x \cdot \cos \omega x \, dx + \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_2^{\infty} 0 \cdot \cos \omega x \, dx}_0 \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = x \quad dv = \cos \omega x \, dx \\ du = dx \quad v = \frac{1}{\omega} \sin \omega x \end{array} \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{\omega} \sin \omega x \Big|_0^2 - \frac{1}{\omega} \int_0^2 \sin \omega x \, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{2}{\omega} \sin 2\omega + \frac{1}{\omega^2} \cos \omega x \Big|_0^2 \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{2}{\omega} \sin 2\omega + \frac{1}{\omega^2} \cos 2\omega - \frac{1}{\omega^2} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\omega \sin 2\omega + \cos 2\omega - 1}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Fourierov integral funkcije f glasi:

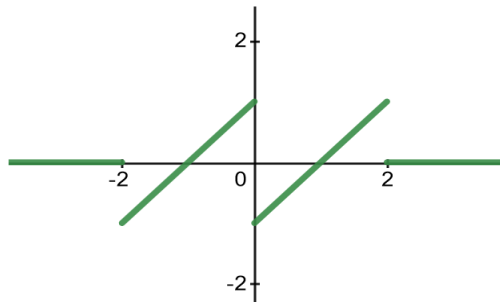
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2\omega \sin 2\omega + \cos 2\omega - 1}{\omega^2} \cos \omega x \, d\omega.$$

2. Prikažite Fourierovim integralom neparno proširenje funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in \langle 0, 2 \rangle \\ 0, & x \in [2, \infty), \end{cases}$$

te odredite

$$I = \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin^2 2t}{t^2} - \frac{\sin 2t}{t} - \frac{\sin 4t}{2t} \right) dt.$$



Slika 30: Graf neparnog proširenja funkcije (zadatak 2.)

Kako bi dobili neparno proširenje funkcije f koristimo $f(x) = -f(-x)$. U ovom slučaju je $f(x) = -f(-x) = -(-x - 1) = x + 1$ pa je proširenje funkcije f dano s

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in \langle 0, 2 \rangle \\ x + 1, & x \in \langle -2, 0 \rangle \\ 0, & x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup [2, \infty). \end{cases}$$

Proširenje je neparno iz čega slijedi da je $A(\omega) = 0$, a sinusni spektar $B(\omega)$ računamo:

$$\begin{aligned} B(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^2 (x - 1) \cdot \sin \omega x \, dx + \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_2^{\infty} 0 \cdot \sin \omega x \, dx}_0 \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = x - 1 \quad dv = \sin \omega x \, dx \\ du = dx \quad v = -\frac{1}{\omega} \cos \omega x \end{array} \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x-1}{\omega} \cos \omega x \Big|_0^2 + \frac{1}{\omega} \int_0^2 \cos \omega x \, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{\omega} \cos 2\omega - \frac{1}{\omega} \cos 0 + \frac{1}{\omega^2} \sin \omega x \Big|_0^2 \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{\omega} \cos 2\omega - \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} \sin 2\omega \right). \end{aligned}$$

Fourierov integral funkcije f glasi:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(-\frac{\cos 2\omega}{\omega} - \frac{1}{\omega} + \frac{\sin 2\omega}{\omega^2} \right) \sin \omega x \, d\omega.$$

Sada treba odrediti integral I . Uočimo da za $x = 2$ dobivamo traženi integral

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(-\frac{\cos 2\omega}{\omega} - \frac{1}{\omega} + \frac{\sin 2\omega}{\omega^2} \right) \sin 2\omega \, d\omega \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \omega = t \\ d\omega = dt \end{array} \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(-\frac{\cos 2t}{t} - \frac{1}{t} + \frac{\sin 2t}{t^2} \right) \sin 2t \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(-\frac{\cos 2t \sin 2t}{t} - \frac{\sin 2t}{t} + \frac{\sin^2 2t}{t^2} \right) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(-\frac{\sin 4t}{2t} - \frac{\sin 2t}{t} + \frac{\sin^2 2t}{t^2} \right) dt \\ &= \frac{2}{\pi} I \end{aligned}$$

iz čega slijedi da je $I = \frac{\pi}{2} \cdot f(2)$.

Konačno, odredimo $f(2)$. Funkcija f ima prekid u točki $x = 2$, $f(2)$ računamo na sljedeći način:

$$f(2) = \frac{\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)}{2} = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

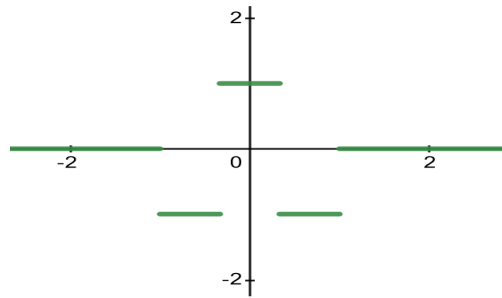
Sada je $I = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$.

3. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{9} - x^2\right), & x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

te odredite

$$I = \int_0^{\infty} \left(-\frac{\sin t}{t} + \frac{2 \sin \frac{t}{3}}{t} \right) dt.$$



Slika 31: Graf funkcije (zadatak 3.)

$$\text{Kako je } \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

to je na segmentu $[-1, 1]$

$$\operatorname{sgn} \left(\frac{1}{9} - x^2 \right) = \begin{cases} 1, & x \in \left\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle, \text{ jer tada je } \frac{1}{9} - x^2 > 0 \\ -1, & x \in [-1, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, 1], \text{ jer tada je } \frac{1}{9} - x^2 < 0 \\ 0, & x = -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Sada zadanu funkciju f možemo zapisati u sljedećem obliku

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle \\ -1, & x \in [-1, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, 1] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Funkcija f je parna iz čega slijedi da je $B(\omega) = 0$, a $A(\omega)$ računamo:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{3}} \cos \omega x \, dx - \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{3}}^1 \cos \omega x \, dx + \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} 0 \cdot \cos \omega x \, dx}_0 \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega x \Big|_0^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\omega} \sin \omega x \Big|_{\frac{1}{3}}^1 \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin \frac{\omega}{3}}{\omega} - \frac{\sin \omega}{\omega} + \frac{\sin \frac{\omega}{3}}{\omega} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{2 \sin \frac{\omega}{3}}{\omega} - \frac{\sin \omega}{\omega} \right). \end{aligned}$$

Fourierov integral funkcije f glasi:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{2 \sin \frac{\omega}{3}}{\omega} - \frac{\sin \omega}{\omega} \right) \cos \omega x \, d\omega.$$

Preostaje odrediti integral I . Specijalno, za $x = 0$ dobivamo traženi integral

$$f(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{2 \sin \frac{\omega}{3}}{\omega} - \frac{\sin \omega}{\omega} \right) d\omega = \left\{ \begin{array}{l} \omega = t \\ d\omega = dt \end{array} \right\} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{2 \sin \frac{t}{3}}{t} - \frac{\sin t}{t} \right) dt = \frac{2}{\pi} I,$$

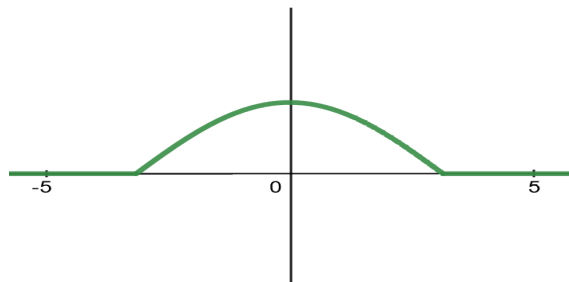
odnosno $I = \frac{\pi}{2} \cdot f(0)$. Kako je $0 \in \langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \rangle$ i $f(0) = 1$ konačno je $I = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}$.

4. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cos \frac{x}{2}, & x \in [-\pi, \pi] \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

te odredite

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos \pi t}{1 - 4t^2} dt.$$



Slika 32: Graf funkcije (zadatak 4.)

Funkcija f je parna iz čega slijedi da je $B(\omega) = 0$, a $A(\omega)$ računamo:

$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \omega x \, dx + \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} 0 \cdot \cos \omega x \, dx}_0 \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\cos \left(\omega + \frac{1}{2} \right) x + \cos \left(\omega - \frac{1}{2} \right) x \right] dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{\omega + \frac{1}{2}} \sin \left(\omega + \frac{1}{2} \right) x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\omega - \frac{1}{2}} \sin \left(\omega - \frac{1}{2} \right) x \Big|_0^{\pi} \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{\omega + \frac{1}{2}} \sin \left(\omega \pi + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{\omega - \frac{1}{2}} \sin \left(\omega \pi - \frac{\pi}{2} \right) \right] \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos \omega \pi}{\omega + \frac{1}{2}} - \frac{\cos \omega \pi}{\omega - \frac{1}{2}} \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\omega \cos \omega \pi - \frac{1}{2} \cos \omega \pi - \omega \cos \omega \pi - \frac{1}{2} \cos \omega \pi}{\omega^2 - \frac{1}{4}} \\
 &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\cos \omega \pi}{\frac{1}{4} - \omega^2} \\
 &= \frac{8 \cos \omega \pi}{\pi (1 - 4\omega^2)}.
 \end{aligned}$$

Fourierov integral funkcije f glasi:

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{8 \cos \pi \omega}{\pi (1 - 4\omega^2)} \cos \omega x \, d\omega.$$

Preostaje odrediti integral I . Specijalno, za $x = 0$ dobivamo traženi integral

$$f(0) = \int_0^{\infty} \frac{8 \cos \pi \omega}{\pi (1 - 4\omega^2)} d\omega = \left\{ \begin{array}{l} \omega = t \\ d\omega = dt \end{array} \right\} = \int_0^{\infty} \frac{8 \cos \pi t}{\pi (1 - 4t^2)} dt = \frac{8}{\pi} I,$$

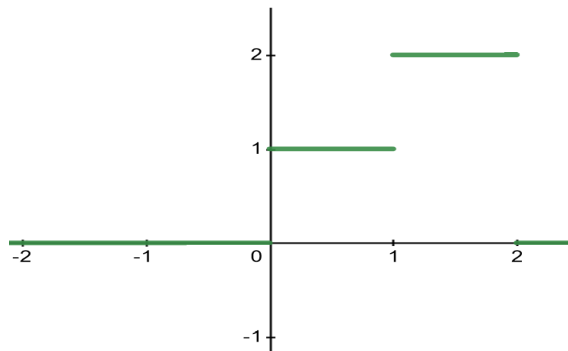
odnosno $I = \frac{\pi}{8} \cdot f(0)$. Kako je $0 \in [-\pi, \pi]$ i $f(0) = 2 \cos \frac{0}{2} = 2 \cdot 1 = 2$ konačno je $I = \frac{\pi}{8} \cdot 2 = \frac{\pi}{4}$.

5. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

te odredite

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} (4 \cos t - 1) dt.$$



Slika 33: Graf funkcije (zadatak 5.)

Funkcija f nije ni parna ni neparna stoga računamo i kosinusni i sinusni spektar:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x dx \\ &= \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 0 \cdot \cos \omega x dx}_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos \omega x dx + \frac{2}{\pi} \int_1^2 \cos \omega x dx + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_2^{\infty} 0 \cdot \cos \omega x dx}_0 \\ &= \frac{1}{\pi \omega} \sin \omega x \Big|_0^1 + \frac{2}{\pi \omega} \sin \omega x \Big|_1^2 \\ &= \frac{\sin \omega}{\pi \omega} + \frac{2 \sin 2\omega}{\pi \omega} - \frac{2 \sin \omega}{\pi \omega} \\ &= \frac{-\sin \omega + 2 \sin 2\omega}{\pi \omega}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx \\
&= \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 0 \cdot \sin \omega x \, dx}_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin \omega x \, dx + \frac{2}{\pi} \int_1^2 \sin \omega x \, dx + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_2^{\infty} 0 \cdot \sin \omega x \, dx}_0 \\
&= -\frac{1}{\pi\omega} \cos \omega x \Big|_0^1 - \frac{2}{\pi\omega} \cos \omega x \Big|_1^2 \\
&= -\frac{\cos \omega}{\pi\omega} + \frac{1}{\pi\omega} - \frac{2 \cos 2\omega}{\pi\omega} + \frac{2 \cos \omega}{\pi\omega} \\
&= \frac{1 + \cos \omega - 2 \cos 2\omega}{\pi\omega}.
\end{aligned}$$

Fourierov integral funkcije f glasi:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} ((-\sin \omega + 2 \sin 2\omega) \cos \omega x + (1 + \cos \omega - 2 \cos 2\omega) \sin \omega x) \, d\omega.$$

Preostaje odrediti integral I . Specijalno, za $x = 0$ dobivamo traženi integral

$$\begin{aligned}
f(0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} (-\sin \omega + 2 \sin 2\omega) \, d\omega = \left\{ \begin{array}{l} \omega = t \\ d\omega = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{t} (-\sin t + 2 \sin 2t) \, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{t} (-\sin t + 4 \sin t \cos t) \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} (4 \cos t - 1) \, dt = \frac{1}{\pi} I,
\end{aligned}$$

odnosno $I = \pi \cdot f(0)$. Funkcija f ima prekid u točki $x = 0$ pa $f(0)$ računamo na sljedeći način:

$$f(0) = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Konačno je $I = \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$.

7 LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

7.1 Osnovni pojmovi

Neka je f funkcija realnog argumenta t , definirana za $t > 0$ i s vrijednostima u skupu realnih ili kompleksnih brojeva. Neka je s realni ili kompleksni parametar.

Laplaceov transformat funkcije f je funkcija F definirana sa

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

za svaki s za koji ovaj nepravi integral konvergira. Funkcija f se naziva **original** ili gornja funkcija, a $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ **slika** ili donja funkcija.

Originale označavamo malim slovima f, g, h a njihove slike velikim slovima F, G, H .

Pridruživanje $f \mapsto F$ nazivamo **Laplaceova transformacija** i označavamo ga s \mathcal{L} . Dakle, $\mathcal{L}(f) = F$. Obratna veza, koja slici pridružuje original, naziva se **inverzna Laplaceova transformacija** i označava s \mathcal{L}^{-1} . Dakle, $\mathcal{L}^{-1}(F) = f$.

Da je originalu f pridružena slika F možemo zapisati i ovako:

$$f(t) \circ\!\!\!\rightarrow F(s)$$

a obratnu vezu zapisujemo

$$F(s) \bullet\!\!\!\rightarrow f(t).$$

Tablica osnovnih Laplaceovih transformata

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\text{sh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\text{ch}(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

Svojstva Laplaceove transformacije

$$f(t) \circ \bullet F(s), a > 0, g(t) \circ \bullet G(s)$$

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \text{ je step funkcija.}$$

$\alpha f(t) + \beta g(t) \circ \bullet \alpha F(s) + \beta G(s)$
$f(at) \circ \bullet \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
$e^{-at} f(t) \circ \bullet F(s+a)$
$f(t-a)u(t-a) \circ \bullet e^{-as} F(s)$
$f'(t) \circ \bullet sF(s) - f(0)$
$f^{(n)}(t) \circ \bullet s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$t^n f(t) \circ \bullet (-1)^n F^{(n)}(s)$
$\frac{f(t)}{t} \circ \bullet \int_s^\infty F(s) ds$
$\int_0^t f(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{F(s)}{s}$

Rješavanje diferencijalnih jednadžbi

Pomoću Laplaceove transformacije možemo rješavati početni problem koji se sastoji od linearne diferencijalne jednadžbe (reda n) s konstantnim koeficijentima

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t) = f(t)$$

i početnih uvjeta

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}.$$

Postavimo problem ekvivalentan početnom preslikavajući ga u donje područje.

Neka je $x(t) \circ \bullet X(s)$ i $f(t) \circ \bullet F(s)$. Tada je

$$\begin{aligned} x'(t) &\circ \bullet sX(s) - x(0) = sX(s) - x_0 \\ x''(t) &\circ \bullet s(sX(s) - x_0) - x'(0) = s^2X(s) - sx_0 - x_1 \\ &\vdots \\ x^{(n)}(t) &\circ \bullet s^n X(s) - s^{n-1}x_0 - s^{n-2}x_1 - \dots - sx_{n-1} - x_n, \end{aligned}$$

pa (DJ) prelazi u

$$\begin{aligned} s^n X(s) - s^{n-1}x_0 - \dots - x_n + a_{n-1} [s^{n-1}X(s) - s^{n-2}x_0 - \dots - x_{n-1}] \\ + \dots + a_1 [sX(s) - x_0] + a_0X(s) = F(s). \end{aligned}$$

Nakon sređivanja, ovu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$P(s)X(s) + G(s) = F(s).$$

gdje je $P(s)$ karakteristični polinom diferencijalne jednadžbe (stupnja n), a $G(s)$ neki polinom stupnja $n-1$. Odavde dobivamo

$$X(s) = \frac{F(s) - G(s)}{P(s)},$$

kojeg trebamo vratiti u gornje područje.

7.2 Zadaci

1. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije $f(t) = t, t \geq 0$.
2. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije $f(t) = (3 - 2t)e^{-5t}$.
3. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije $f(t) = \cos^2 t$.
4. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije $f(t) = e^{3t} t \sin^2 t$.
5. Koristeći Laplaceovu transformaciju izračunajte $\int_0^{\infty} e^{-7t} t \sin t dt$.
6. Koristeći Laplaceovu transformaciju izračunajte $\int_0^{\infty} e^{-t} t^2 \cos t dt$.
7. Izračunajte original funkcije $F(s) = \frac{3s + 7}{s^2 - 2s - 3}$.
8. Izračunajte original funkcije $F(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 13}$.
9. Izračunajte $L^{-1}[F(s)](t)$ ako je $F(s) = \frac{e^{-2s}}{(s + 3)^2}$.
10. Izračunajte $L^{-1}[F(s)](t)$ ako je $F(s) = \frac{e^{-s}}{s(s - 1)}$.
11. Primjenom Laplaceove transformacije riješite početni problem

$$y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 3.$$

12. Primjenom Laplaceove transformacije riješite početni problem

$$y'' - 3y' + 2y = te^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2.$$

13. Primjenom Laplaceove transformacije riješite sustav diferencijalnih jednačbi

$$\begin{aligned} y' + 3y + z &= 0 \\ z' - y + z &= 0, \end{aligned}$$

uz početne uvjete $y(0) = 1, z(0) = 1$.

Rješenja:

1. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije $f(t) = t, t \geq 0$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} t dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\int_0^a e^{-st} t dt \right) \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = t \quad dv = e^{-st} dt \\ du = dt \quad v = -\frac{1}{s} e^{-st} \end{array} \right\} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{t}{s} e^{-st} \Big|_0^a + \frac{1}{s} \int_0^a e^{-st} dt \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\underbrace{-\frac{a}{s} e^{-sa}}_0 + \frac{0}{s} e^0 - \frac{1}{s^2} e^{-st} \Big|_0^a \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{s^2} (e^{-sa} - e^0) \right) = -\frac{1}{s^2} (0 - 1) = \frac{1}{s^2}, s > 0\end{aligned}$$

jer je

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{a}{s} e^{-sa} \right) = -\frac{1}{s} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{e^{sa}} \stackrel{L'H}{=} -\frac{1}{s^2} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{sa}} = 0.$$

2. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije $f(t) = (3 - 2t) e^{-5t}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)](s) &= \mathcal{L}[(3 - 2t) e^{-5t}](s) = \mathcal{L}[3e^{-5t} - 2te^{-5t}](s) \\ &\stackrel{1^\circ}{=} 3\mathcal{L}[e^{-5t}](s) - 2\mathcal{L}[te^{-5t}](s) \\ &\stackrel{2^\circ}{=} 3\mathcal{L}[1](s+5) - 2\mathcal{L}[t](s+5) \\ &= \frac{3}{s+5} - \frac{2}{(s+5)^2} = \frac{3s+13}{(s+5)^2}, s > 0.\end{aligned}$$

$$1^\circ \alpha f(t) + \beta g(t) \leftrightarrow \alpha F(s) + \beta G(s)$$

$$2^\circ e^{-at} f(t) \leftrightarrow F(s+a)$$

3. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije $f(t) = \cos^2 t$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)](s) &= \mathcal{L}[\cos^2 t](s) = \mathcal{L}\left[\frac{1 + \cos 2t}{2}\right](s) \\ &\stackrel{1^\circ}{=} \frac{1}{2}\mathcal{L}[1](s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos 2t](s) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4} \right), s > 0.\end{aligned}$$

4. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije $f(t) = e^{3t} t \sin^2 t$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f(t)](s) &= \mathcal{L}[e^{3t} t \sin^2 t](s) \stackrel{2^\circ}{=} \mathcal{L}[t \sin^2 t](s-3) \\
 &= \mathcal{L}\left[t \frac{1 - \cos 2t}{2}\right](s-3) \\
 &\stackrel{1^\circ}{=} \frac{1}{2} (\mathcal{L}[t](s-3) - \mathcal{L}[t \cos 2t](s-3)) \\
 &\stackrel{3^\circ}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(s-3)^2} - (-1)^1 \frac{d}{ds} \mathcal{L}[\cos 2t](s-3) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(s-3)^2} + \frac{d}{ds} \left(\frac{s-3}{(s-3)^2 + 4} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(s-3)^2} + \frac{d}{ds} \left(\frac{s-3}{s^2 - 6s + 13} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(s-3)^2} + \frac{-s^2 + 6s - 5}{(s^2 - 6s + 13)^2} \right).
 \end{aligned}$$

$$3^\circ t^n f(t) \rightsquigarrow (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

5. Koristeći Laplaceovu transformaciju izračunajte $\int_0^\infty e^{-7t} t \sin t dt$.

Budući da je $\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ slijedi $f(t) = t \sin t$ i $s = 7$. Dakle,

$$\int_0^\infty e^{-7t} t \sin t dt = \mathcal{L}[t \sin t](7).$$

Računamo

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[t \sin t](s) &= (-1) \frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sin t](s) \\
 &= (-1) \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) \\
 &= (-1) \frac{d}{ds} ((s^2 + 1)^{-1}) \\
 &= (-1)(-1)(s^2 + 1)^{-2} 2s \\
 &= \frac{2s}{(s^2 + 1)^2},
 \end{aligned}$$

$$\text{pa je } \mathcal{L}[t \sin t](7) = \frac{2 \cdot 7}{(7^2 + 1)^2} = \frac{14}{2500}.$$

6. Koristeći Laplaceovu transformaciju izračunajte $\int_0^\infty e^{-t} t^2 \cos t dt$.

Kako je $\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ slijedi da je $f(t) = t^2 \cos t$ i $s = 1$. Dakle,

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^2 \cos t dt = \mathcal{L}[t^2 \cos t](1). \quad (1)$$

Računamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^2 \cos t](s) &= (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}[\cos t](s) \\ &= \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{s}{s^2 + 1} \right) \\ &= \frac{d}{ds} \left(\frac{1 - s^2}{(s^2 + 1)^2} \right) \\ &= \frac{2s(s^2 - 3)}{(s^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

$$\text{pa je } \mathcal{L}[t^2 \cos t](1) = \frac{2 \cdot 1 \cdot (1^2 - 3)}{(1^2 + 1)^3} = -\frac{1}{2}.$$

7. Izračunajte original funkcije $F(s) = \frac{3s + 7}{s^2 - 2s - 3}$.

Nazivnik funkcije možemo faktorizirati $s^2 - 2s - 3 = (s - 3)(s + 1)$ pa funkciju $F(s)$ rastavljamo na parcijalne razlomke. Imamo:

$$\frac{3s + 7}{s^2 - 2s - 3} = \frac{A}{s - 3} + \frac{B}{s + 1}$$

iz čega slijedi da je $A = 4$, $B = -1$, tj. $F(s) = \frac{4}{s - 3} - \frac{1}{s + 1}$. Original funkcije je:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3s + 7}{s^2 - 2s - 3} \right] (t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{4}{s - 3} - \frac{1}{s + 1} \right] (t) \\ &= 4\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s - 3} \right] (t) - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s + 1} \right] (t) = 4e^{3t} - e^{-t}. \end{aligned}$$

8. Izračunajte original funkcije $F(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 13}$.

Nazivnik funkcije se ne može faktorizirati, ali se može dopuniti do kvadrata binoma: $s^2 + 6s + 13 = (s + 3)^2 + 4$. Original funkcije je:

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s + 3)^2 + 4} \right] (t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{2} \frac{2}{(s + 3)^2 + 4} \right] (t) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{(s + 3)^2 + 4} \right] (t) = \frac{1}{2} e^{-3t} \sin 2t. \end{aligned}$$

9. Izračunajte $\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$ ako je $F(s) = \frac{e^{-2s}}{(s+3)^2}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{(s+3)^2}\right](t) \\ &\stackrel{4^\circ}{=} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)^2}\right](t-2) \cdot u(t-2) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1!}{(s+3)^2}\right](t-2) \cdot u(t-2) \\ &= (t-2)e^{-3(t-2)}u(t-2) = (t-2)e^{-3t+6}u(t-2).\end{aligned}$$

$$4^\circ f(t-a)u(t-a) \leftrightarrow e^{-as}F(s)$$

10. Izračunajte $\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$ ako je $F(s) = \frac{e^{-s}}{s(s-1)}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s(s-1)}\right](t) \\ &\stackrel{4^\circ}{=} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)}\right](t-1) \cdot u(t-1) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s} + \frac{1}{s-1}\right](t-1) \cdot u(t-1) \\ &= -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t-1) \cdot u(t-1) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right](t-1) \cdot u(t-1) \\ &= (-1 + e^{t-1})u(t-1).\end{aligned}$$

11. Primjenom Laplaceove transformacije riješite početni problem

$$y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 3.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y''](s) - \mathcal{L}[y'](s) - 6\mathcal{L}[y](s) &= 0 \\ s^2\mathcal{L}[y](s) - s \cdot y(0) - y'(0) - s \cdot \mathcal{L}[y](s) + y(0) - 6\mathcal{L}[y](s) &= 0 \\ s^2\mathcal{L}[y](s) + 2s - 3 - s \cdot \mathcal{L}[y](s) - 2 - 6\mathcal{L}[y](s) &= 0 \\ \mathcal{L}[y](s)(s^2 - s - 6) &= -2s + 5 \\ \mathcal{L}[y](s) &= \frac{-2s + 5}{s^2 - s - 6} \\ \mathcal{L}[y](s) &= \frac{-2s + 5}{(s-3)(s+2)}\end{aligned}$$

$\mathcal{L}[y](s)$ rastavljamo na parcijalne razlomke:

$$\frac{-2s + 5}{s^2 - s - 6} = \frac{A}{s - 3} + \frac{B}{s + 2}$$

iz čega slijedi da je $A = \frac{-1}{5}$, $B = \frac{-9}{5}$, to jest

$$\mathcal{L}[y](s) = -\frac{1}{5(s-3)} - \frac{9}{5(s+2)}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{1}{5(s-3)} - \frac{9}{5(s+2)} \right] (t) \\ &= -\frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-3} \right] (t) - \frac{9}{5} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+2} \right] (t) \\ &= -\frac{1}{5} e^{3t} - \frac{9}{5} e^{-2t}. \end{aligned}$$

12. Primjenom Laplaceove transformacije riješite početni problem

$$y'' - 3y' + 2y = te^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2.$$

$$\mathcal{L}[y''](s) - 3\mathcal{L}[y'](s) + 2\mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[te^t](s)$$

$$s^2 \mathcal{L}[y](s) - s \cdot y(0) - y'(0) - 3(s \cdot \mathcal{L}[y](s) - y(0)) + 2\mathcal{L}[y](s) = \frac{1!}{(s-1)^2}$$

$$s^2 \mathcal{L}[y](s) - s + 2 - 3s \cdot \mathcal{L}[y](s) + 3 + 2\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$\mathcal{L}[y](s)(s^2 - 3s + 2) = \frac{1}{(s-1)^2} + s - 5$$

$$\mathcal{L}[y](s)((s-1)(s-2)) = \frac{s^3 - 7s^2 + 11s - 4}{(s-1)^2}$$

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{s^3 - 7s^2 + 11s - 4}{(s-1)^3(s-2)}$$

$\mathcal{L}[y](s)$ rastavljamo na parcijalne razlomke:

$$\frac{s^3 - 7s^2 + 11s - 4}{(s-1)^3(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-1)^3} + \frac{D}{s-2}$$

iz čega slijedi da je $A = 3$, $B = -1$, $C = -1$, $D = -2$, to jest

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{3}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} - \frac{2}{s-2}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} - \frac{2}{s-2} \right] (t) \\ &= 3\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-1} \right] (t) - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-1)^2} \right] (t) - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-1)^3} \right] (t) - 2\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-2} \right] (t) \\ &= 3e^t - te^t - \frac{t^2}{2}e^t - 2e^{2t}. \end{aligned}$$

13. Primjenom Laplaceove transformacije riješite sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned}y' + 3y + z &= 0 \\z' - y + z &= 0,\end{aligned}$$

uz početne uvjete $y(0) = 1, z(0) = 1$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y'](s) + 3\mathcal{L}[y](s) + \mathcal{L}[z](s) &= 0 \\ \mathcal{L}[z'](s) - \mathcal{L}[y](s) + \mathcal{L}[z](s) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s\mathcal{L}[y](s) - y(0) + 3\mathcal{L}[y](s) + \mathcal{L}[z](s) &= 0 \\ s\mathcal{L}[z](s) - z(0) - \mathcal{L}[y](s) + \mathcal{L}[z](s) &= 0\end{aligned}$$

$$(s + 3)\mathcal{L}[y](s) + \mathcal{L}[z](s) = 1 \tag{1}$$

$$(s + 1)\mathcal{L}[z](s) - \mathcal{L}[y](s) = 1 \tag{2}$$

Iz jednadžbe (1) je

$$\mathcal{L}[z](s) = 1 - (s + 3)\mathcal{L}[y](s). \tag{3}$$

Uvrštavanjem (3) u (2) dobivamo

$$(s + 1)(1 - (s + 3)\mathcal{L}[y](s)) - \mathcal{L}[y](s) = 1,$$

iz čega slijedi

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{s}{(s + 2)^2}. \tag{4}$$

Zatim, uvrštavanjem (4) u (3) dobivamo

$$\mathcal{L}[z](s) = \frac{s + 4}{(s + 2)^2}.$$

Konačno,

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s + 2)^2} \right] (t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + 2 - 2}{(s + 2)^2} \right] (t) \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s + 2} \right] (t) - 2\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s + 2)^2} \right] (t) \\ &= e^{-2t} - 2te^{-2t},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + 4}{(s + 2)^2} \right] (t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + 2 + 2}{(s + 2)^2} \right] (t) \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s + 2} \right] (t) + 2\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s + 2)^2} \right] (t) \\ &= e^{-2t} + 2te^{-2t}.\end{aligned}$$

8 LITERATURA

- [1] Fourierov red i integral, Laplaceova transformacija, N. Elezović, Element, 2010.
- [2] Vektorska analiza, L. Korkut, M. Krnić, M. Pašić, Element, 2009.
- [3] <http://lavica.fesb.unist.hr/matematika3/predavanja/index.html>
- [4] Razni primjeri s kolokvija i ispita s FESB-a, FER-a, FSB-a.