Upoznavanje s Bernoullijevim brojevima

Grgić, Ivana

Source / Izvornik: **Acta mathematica Spalatensia. Series didactica, 2022, 5, 59 - 70**

Journal article, Published version
Rad u časopisu, Objavljena verzija rada (izdavačev PDF)

https://doi.org/10.32817/amssd.5.6

ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.5 (2022) 59–70
https://doi.org/10.32817/amssd.5.6

Zaprimljen: 4. ožujka 2022.
Prihvaćen: 21. studenoga 2022.

Upoznavanje s Bernoullijevim brojevima

Ivana Grgić

Sažetak

Bernoullijevi brojevi su izuzetno važni u matematici. U ovom radu su iznesene osnovne ideje o tome kako su otkriveni i definirani Bernoullijevi brojevi, kako su dovedeni u vezu s nekim drugim poznatim rezultatima, te je u par primjera pokazana njihova primjena.

Ključni pojmovi: Bernoullijevi brojevi, sume m-tih potencija, funkcije izvodnice

1. Uvod

Jacob Bernoulli je bio švicarski matematičar, rođen 1655. godine u Baselu kao jedan od osam nadarenih matematičara i fizičara u obitelji Bernoulli. Bavio se geometrijom, beskonačnim redovima, vjerojatnošću i teorijom brojeva. Njegovi brojni doprinosi matematici uključuju Bernoullijevu diferencijalnu jednadžbu, Bernoullijevu lemniskatu, Bernoullijevu distribuciju, Bernoullijevu nejednakost, Bernoullijeve brojeve i polinome te mnoge druge. Njegovo najpoznatije djelo *Ars Conjectandi* objavljeno je 1713. u Baselu, osam godina nakon njegove smrti. Djelo nije bilo završeno u trenutku Bernoullijeve smrti, ali je i danas jedno od najznačajnijih djela iz teorije vjerojatnosti. U njemu se pojavljuju Bernoullijevi brojevi u raspravi o redovima potencija.

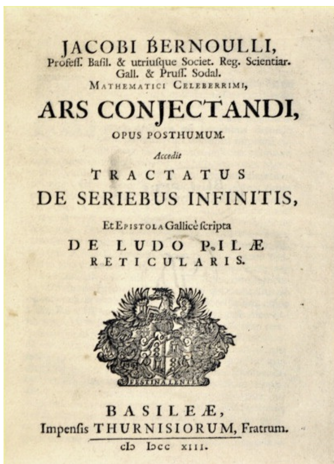
Formule za sume m-tih potencija su intrigirale matematičare još od antičkih vremena. Danas su učenicima i studentima jako dobro poznate formule za sumu potencija prvih n prirodnih brojeva koje se najčešće dokazuju matematičkom indukcijom. Sljedeće tri formule su one koje uobičajeno poznaju:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$$
$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}+0\cdot n$$

za svaki prirodan broj n.

Formule za sume m-tih potencija u generaliziranom obliku je prvi dao Thomas Harriot (1560. – 1621.). U otprilike isto vrijeme, Johann Faulhaber (1580. – 1635.) je dao formule za sume do 17. potencije, što je bilo puno više od ikoga prije njega, ali nije znao kako ih poopćiti. Često se smatra da je Pierre de Fermat (1601. – 1665.) zaslužan za otkriće formula, ali ipak je Blaise Pascal (1623. – 1662.) bio taj koji je dao eksplicitne formule. Jacob Bernoulli je najpoznatiji i najzaslužniji za prezentiranje formula za sume m-tih potencija europskoj matematičkoj zajednici. Njegova formulacija je najkorisnija jer je generalizirao formule i dao precizne upute za pronalaženje koeficijenata u formulama [?, 6]

(a) Jacob Bernoulli



JACOBI BERNOULLI,
Profeſſ. Baſil. & utriuſque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruſſ. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè ſcripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impenſis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↃ IↃCC XIII.

(b) Ars Conjectandi

Slika 1. Jacob Bernoulli i njegovo najpoznatije djelo.

2. Bernoullijevi brojevi

Sume m-tih potencija su definirane sa

$$S_m(n) = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m = \sum_{k=1}^{n} k^m, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Bernoulli je u djelu *Ars Conjectandi* izračunao formule za $S_m(n)$ do $m = 10$ koristeći Fermatove metode [3]. Ovdje navodimo prvih šest suma do broja $n-1$, jer nam ova forma omogućava jasnije uočavanje uzoraka koji se javljaju.

$$\begin{array}{llllll}
S_1(n-1) = \frac{1}{2}n^2 & -\frac{1}{2}n & & & & \\
S_2(n-1) = \frac{1}{3}n^3 & -\frac{1}{2}n^2 & +\frac{1}{6}n & & & \\
S_3(n-1) = \frac{1}{4}n^4 & -\frac{1}{2}n^3 & +\frac{1}{4}n^2 & & & \\
S_4(n-1) = \frac{1}{5}n^5 & -\frac{1}{2}n^4 & +\frac{1}{3}n^3 & -\frac{1}{30}n & & \\
S_5(n-1) = \frac{1}{6}n^6 & -\frac{1}{2}n^5 & +\frac{5}{12}n^4 & -\frac{1}{12}n^2 & & \\
S_6(n-1) = \frac{1}{7}n^7 & -\frac{1}{2}n^6 & +\frac{1}{2}n^5 & -\frac{1}{6}n^3 & +\frac{1}{42}n &
\end{array}$$

Vodeći član u formuli $S_m(n-1)$ je $\frac{1}{m+1}n^{m+1}$, a izlučivanje $\frac{1}{m+1}$ iz odgovarajućeg polinoma daje:

$$\begin{array}{llllll}
S_1(n-1) = \frac{1}{2}\big(n^2 & -n\big) & & & & \\
S_2(n-1) = \frac{1}{3}\big(n^3 & -\frac{3}{2}n^2 & +\frac{1}{2}n\big) & & & \\
S_3(n-1) = \frac{1}{4}\big(n^4 & -2n^3 & +n^2\big) & & & \\
S_4(n-1) = \frac{1}{5}\big(n^5 & -\frac{5}{2}n^4 & +\frac{5}{3}n^3 & -\frac{1}{6}n\big) & & \\
S_5(n-1) = \frac{1}{6}\big(n^6 & -3n^5 & +\frac{5}{2}n^4 & -\frac{1}{2}n^2\big) & & \\
S_6(n-1) = \frac{1}{7}\big(n^7 & -\frac{7}{2}n^6 & +\frac{7}{2}n^5 & -\frac{7}{6}n^3 & +\frac{1}{6}n\big) &
\end{array}$$

Svi koeficijenti u drugom stupcu su višekratnici od $-\frac{1}{2}$: $-1 = 2 \cdot \frac{-1}{2}$, $\frac{-3}{2} = 3 \cdot \frac{-1}{2}$, $-2 = 4 \cdot \frac{-1}{2} \ldots$ U trećem stupcu su višekratnici od $\frac{1}{6}$, u četvrtom višekratnici od $-\frac{1}{30} \ldots$ Izlučivanjem višekratnika dobijemo:

$$S_1(n-1) = \tfrac{1}{2}\big(n^2 \quad -2\cdot\tfrac{1}{2}n\big)$$

$$S_2(n-1) = \tfrac{1}{3}\big(n^3 \quad -3\cdot\tfrac{1}{2}n^2 \quad +3\cdot\tfrac{1}{6}n\big)$$

$$S_3(n-1) = \tfrac{1}{4}\big(n^4 \quad -4\cdot\tfrac{1}{2}n^3 \quad +6\cdot\tfrac{1}{6}n^2\big)$$

$$S_4(n-1) = \tfrac{1}{5}\big(n^5 \quad -5\cdot\tfrac{1}{2}n^4 \quad +10\cdot\tfrac{1}{6}n^3 \quad -5\cdot\tfrac{1}{30}n\big)$$

$$S_5(n-1) = \tfrac{1}{6}\big(n^6 \quad -6\cdot\tfrac{1}{2}n^5 \quad +15\cdot\tfrac{1}{6}n^4 \quad -15\cdot\tfrac{1}{30}n^2\big)$$

$$S_6(n-1) = \tfrac{1}{7}\big(n^7 \quad -7\cdot\tfrac{1}{2}n^6 \quad +21\cdot\tfrac{1}{6}n^5 \quad -35\cdot\tfrac{1}{30}n^3 \quad +7\cdot\tfrac{1}{42}n\big)$$

Promatranjem cjelobrojnih koeficijenta koji ostaju nakon izlučivanja uočava se ono što je i Bernoulli vidio: to su binomni koeficijenti [1] koji odgovaraju retku m. Podsjećaju na Pascalov trokut s nekoliko praznina koje popunjavamo binomnim koeficijentima pomnoženim s nulom. Takvim raspisivanjem se dobije:

$$S_1(n-1) = \tfrac{1}{2}\Big(\tbinom{2}{0}n^2 - \tbinom{2}{1}\tfrac{1}{2}n\Big)$$

$$S_2(n-1) = \tfrac{1}{3}\Big(\tbinom{3}{0}n^3 - \tbinom{3}{1}\tfrac{1}{2}n^2 + \tbinom{3}{2}\tfrac{1}{6}n\Big)$$

$$S_3(n-1) = \tfrac{1}{4}\Big(\tbinom{4}{0}n^4 - \tbinom{4}{1}\tfrac{1}{2}n^3 + \tbinom{4}{2}\tfrac{1}{6}n^2 + \tbinom{4}{3}0n\Big)$$

$$S_4(n-1) = \tfrac{1}{5}\Big(\tbinom{5}{0}n^5 - \tbinom{5}{1}\tfrac{1}{2}n^4 + \tbinom{5}{2}\tfrac{1}{6}n^3 + \tbinom{5}{3}0n^2 - \tbinom{5}{4}\tfrac{1}{30}n\Big)$$

$$S_5(n-1) = \tfrac{1}{6}\Big(\tbinom{6}{0}n^6 - \tbinom{6}{1}\tfrac{1}{2}n^5 + \tbinom{6}{2}\tfrac{1}{6}n^4 + \tbinom{6}{3}0n^3 - \tbinom{6}{4}\tfrac{1}{30}n^2 + \tbinom{6}{5}0n\Big)$$

$$S_6(n-1) = \tfrac{1}{7}\Big(\tbinom{7}{0}n^7 - \tbinom{7}{1}\tfrac{1}{2}n^6 + \tbinom{7}{2}\tfrac{1}{6}n^5 + \tbinom{7}{3}0n^4 - \tbinom{7}{4}\tfrac{1}{30}n^3 + \tbinom{7}{5}0n^2 + \tbinom{7}{6}\tfrac{1}{42}n\Big)$$

Sada je vidljiv uzorak koji se javlja u svim formulama, odnosno $S_m(n-1)$ zadovoljava sljedeću jednadžbu:

$$S_m(n-1) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k n^{m-k+1},$$

pri čemu je B_k niz brojeva koji ostaju nakon izlučivanja u drugom koraku. Dakle, $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_7 = 0$,... Ovo su Bernoullijevi brojevi.

[1] Binomni koeficijent je prirodan broj $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}, n \in \mathbb{N}, 1 \le k \le n$. Za $k = 0$ je $\binom{n}{0} = 1$.

Bernoulli je shvatio da je ovaj niz značajan za problem koji je rješavao, ali nije nastavio raditi na njemu. Nakon publikacije *Ars Conjectandi*, sljedeći matematičar koji se bavio ovim brojevima bio je Leonard Euler (1707. – 1783.). Da bi bolje razumjeli Eulerovu definiciju, koja je do danas najčešća definicija Bernoullijevih brojeva, uvodimo pojam funkcije izvodnice [7] i Taylorovu formulu [6].

Neka je zadan niz realnih brojeva $c_0, c_1, c_2, \ldots$ Cilj je zapisati ga u što sažetijem obliku, a to je moguće napraviti pomoću funkcija izvodnica.

Definicija 1. *Funkciju* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *nazivamo funkcija izvodnica niza* $(c_n)_{n\geq 0}$.

Definicija 2. *Funkciju* $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^n}{n!}$ *nazivamo eksponencijalna funkcija izvodnica niza* $(c_n)_{n\geq 0}$.

Primjer 3. *Neka je* $c \in \mathbb{R}$ *bilo koja konstanta. Funkcija izvodnica beskonačnog niza* $1, c, c^2, \ldots$ *jednaka je* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c^n x^n = \frac{1}{1-cx}$*, tj. zatvorena forma funkcije izvodnice navedenog niza jednaka je* $\frac{1}{1-cx}$*. Posebno, funkcija izvodnica niza* $1, 1, 1, \ldots$ *je* $\frac{1}{1-x}$.

Teorem 4. *Neka funkcija* f *ima na intervalu* (a, b) *derivaciju reda* $n+1$*. Tada za proizvoljnu točku* $x_0 \in (a, b)$ *i za svaki* $x \in (a, b)$ *vrijedi*

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \end{aligned}$$

gdje je $R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{p \cdot n!}(1-\theta)^{n+1-p} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))$ *za* $p \in \mathbb{N}$ *i* $0 < \theta < 1$.

Teorem 5. *Neka funkcija* f *ima na intervalu* (a, b) *derivacije proizvoljnog reda. Tada za proizvoljnu točku* $x_0 \in (a, b)$ *i za* $\forall x \in (a, b)$ *vrijedi* $f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ *ako i samo ako niz ostataka* $(R_n(x))_{n\geq 1}$ *teži k nuli za svaki* $x \in (a, b)$.

Red potencija u teoremu 5 zove se Taylorov red ili Taylorov razvoj funkcije f u točki x_0.

Bernoullijevi brojevi se sada mogu definirati onako kako je to napravio Euler.

Definicija 6. *Bernoullijevi brojevi su koeficijenti eksponencijalne funkcije izvodnice*

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{x^k}{k!},\qquad za\ |x|<2\pi.$$

Funkcija izvodnica $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$ ima uklonjivi prekid u točki $x=0$. Prvih par derivacija funkcije $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$ i njihovi limesi kada x teži u nulu glase:

$$\begin{aligned}
f(x)&=\frac{x}{e^x-1} & \lim_{x\to0}f(x)&=1\\
f'(x)&=\frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2} & \lim_{x\to0}f'(x)&=-\frac{1}{2}\\
f''(x)&=\frac{xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3} & \lim_{x\to0}f''(x)&=\frac{1}{6}\\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

Sada je razvoj funkcije $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$ u Maclaurinov red (Taylorov red u točki $x_0=0$):

$$\begin{aligned}
\frac{x}{e^x-1}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}\\
&=1+\Big(-\frac{1}{2}\Big)x+\Big(\frac{1}{6}\Big)\frac{x^2}{2!}+\Big(-\frac{1}{30}\Big)\frac{x^4}{4!}+\Big(\frac{1}{42}\Big)\frac{x^6}{6!}+\cdots\\
&=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+\frac{x^6}{30240}+\cdots
\end{aligned}$$

Ako se malo odmaknemo od eksponencijalnih funkcija izvodnica i pogledamo pobliže Bernoullijeve brojeve, možemo uočiti neka njihova svojstva koja navodimo u sljedećem poglavlju. Za početak zapišimo prvih dvadeset Bernoullijevih brojeva:

$$\begin{array}{rrr}
B_0=1 & B_7=0 & B_{14}=\frac{7}{6}\\
B_1=\frac{-1}{2} & B_8=\frac{-1}{30} & B_{15}=0\\
B_2=\frac{1}{6} & B_9=0 & B_{16}=-3617/510\\
B_3=0 & B_{10}=\frac{5}{66} & B_{17}=0\\
B_4=\frac{-1}{30} & B_{11}=0 & B_{18}=43867/798\\
B_5=0 & B_{12}=-691/2730 & B_{19}=0\\
B_6=\frac{1}{42} & B_{13}=0 & \vdots
\end{array}$$

3. Neka svojstva Bernoullijevih brojeva

1. B_n su racionalni brojevi
2. $B_{2n+1} = 0$ za $n \geq 1$
3. B_{2n} i B_{2n+2} imaju suprotne predznake za $n \geq 1$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} B_{2n} = \infty$

Dokazat ćemo prva dva. Prvo svojstvo slijedi direktno iz sljedećeg teorema [2].

Teorem 7. *Bernoullijevi brojevi zadovoljavaju sljedeću rekurzivnu formulu:*

$$B_0 = 1;$$
$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} B_j = 0, \quad n \geq 1.$$

Dokaz. Iz definicije Bernoullijevih brojeva znamo da je

$$x = (e^x - 1) \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}.$$

Nakon što razvijemo funkciju $e^x - 1$ u Taylorov red imamo

$$\begin{aligned} x &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{j+1}}{(j+1)!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{(j+1)!k!} x^{j+1+k} \end{aligned}$$

(stavimo $j + k = n$ i grupiramo pribrojnike kojima je taj zbroj stalan)

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j+k=n} \frac{B_k}{(j+1)!k!} \right) x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+1}{k} B_k \right) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

□

Iz ove formule je vidljiva rekurzivna priroda Bernoullijevih brojeva.

$$\begin{aligned}
1 &= B_0 && (n=0)\\
0 &= B_0 + 2B_1 && (n=1)\\
0 &= B_0 + 3B_1 + 3B_2 && (n=2)\\
0 &= B_0 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 && (n=3)\\
0 &= B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 && (n=4)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Također, ovdje dolazi do izražaja bliska povezanost Bernoullijevih brojeva s binomnim koeficijentima i Pascalovim trokutom.

Teorem 8. *$B_{2n+1} = 0$ za $n \geq 1$.*

Dokaz. Vrijedi $\dfrac{x}{e^x - 1} = B_0 + B_1 x + \dfrac{B_2 x^2}{2!} + \dfrac{B_3 x^3}{3!} + \cdots$. Funkcija $g(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} - B_1 x - B_0$ je parna. Kada raspišemo funkciju g i iskoristimo njenu parnost dobijemo:

$$\begin{aligned}
g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} &= \frac{B_2 x^2}{2!} + \frac{B_3 x^3}{3!} + \frac{B_4 x^4}{4!} + \frac{B_5 x^5}{5!} + \cdots\\
&= \frac{B_2 x^2}{2!} - \frac{B_3 x^3}{3!} + \frac{B_4 x^4}{4!} - \frac{B_5 x^5}{5!} + \cdots
\end{aligned}$$

Po definiciji jednakosti polinoma vrijedi $B_3 = -B_3$, $B_5 = -B_5$, $B_7 = -B_7, \ldots$ iz čega slijedi da su svi Bernoullijevi brojevi neparnog indeksa, osim B_1, jednaki nuli [5]. $\square$

4. Primjene Bernoullijevih brojeva

Bernoullijevi brojevi se pojavljuju u razvoju u red potencija funkcija tangens i kotangens [4], kao i u razvoju hiperbolnih funkcija. Izvest ćemo razvoj funkcije kotangens hiperbolni.

U prethodnom poglavlju definirana je funkcija g.

$$\begin{aligned}
g(x) = \frac{x}{e^x - 1} - B_1 x - B_0 &= \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} - 1\\
&= \frac{2x + x(e^x - 1)}{2(e^x - 1)} - 1 = \frac{x(e^x + 1)}{2(e^x - 1)} \cdot \frac{e^{\frac{-x}{2}}}{e^{\frac{-x}{2}}} - 1\\
&= \frac{x(e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{-x}{2}})}{2(e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}})} - 1.
\end{aligned}$$

Znamo da za sinus hiperbolni i kosinus hiperbolni vrijedi

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ i } \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

pa je

$$\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{-x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{-x}{2}}} = \frac{\cosh \frac{x}{2}}{\sinh \frac{x}{2}} = \operatorname{cth} \frac{x}{2}.$$

Dakle, $g(x) = \frac{x}{2} \operatorname{cth} \frac{x}{2} - 1$. Iz dokaza teorema 8 je

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} \operatorname{cth} \frac{x}{2} - 1 &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} \\ \frac{x}{2} \operatorname{cth} \frac{x}{2} &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} \\ \operatorname{cth} \frac{x}{2} &= \frac{2}{x} + \frac{2}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} \\ \operatorname{cth} \frac{x}{2} &= \frac{2}{x} + \frac{2}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\operatorname{cth} \frac{x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2B_{2n} x^{2n-1}}{(2n)!}$$

odnosno

$$\operatorname{cth} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2B_{2n}(2x)^{2n-1}}{(2n)!}.$$

Bernoullijevi brojevi imaju i brojne druge primjene. Povezani su sa Stirlingovim i Eulerovim brojevima, vezani su uz Fermatov posljednji teorem. Jedna od najmoćnijih primjena je evaluacija Riemannove zeta funkcije u parnim brojevima.

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Bernoullijevi brojevi su jako važni u analizi; pojavljuju se u Euler-Maclaurinovoj formuli koja ima veliku primjenu u matematici i fizici. Ta formula se koristi za aproksimaciju integrala konačnim sumama, ili obrnuto, za evaluaciju konačnih suma i beskonačnih redova korištenjem integrala. Formula glasi

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \int_0^n f(k)\,\mathrm{d}k - \frac{1}{2}\big(f(0)+f(n)\big) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)\right).$$

U primijenjenoj matematici primjene Bernoullijevih brojeva su tako brojne da ih je teško sve navesti. Jedan zanimljiv primjer primjene Bernoullijevih brojeva koji navodimo u nastavku je izračunavanje determinante koja sadrži faktorijele, a koju bi inače bilo jako teško izračunati [1].

Znamo da je rekurzivna relacija koju zadovoljavaju Bernoullijevi brojevi:

$B_0 = 1,\ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0, n \geq 2$ (u teoremu 7 zamijenimo n sa $n-1$).

Označimo $b_k = \frac{B_k}{k!}$. Raspisivanjem rekurzivne relacije dobijemo sljedeći sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned}
b_1 + \frac{1}{2!} &= 0\\
\frac{b_1}{2!} + b_2 + \frac{1}{3!} &= 0\\
\frac{b_1}{3!} + \frac{b_2}{2!} + b_3 + \frac{1}{4!} &= 0\\
&\vdots\\
\frac{b_1}{(n-1)!} + \frac{b_2}{(n-2)!} + \cdots + b_{n-1} + \frac{1}{n!} &= 0\\
\frac{b_1}{n!} + \frac{b_2}{(n-1)!} + \cdots + b_n + \frac{1}{(n+1)!} &= 0,
\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}
b_1 &= -\frac{1}{2!}\\
\frac{b_1}{2!} + b_2 &= -\frac{1}{3!}\\
\frac{b_1}{3!} + \frac{b_2}{2!} + b_3 &= -\frac{1}{4!}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\frac{b_1}{(n-1)!} + \frac{b_2}{(n-2)!} + \cdots + b_{n-1} = -\frac{1}{n!}$$
$$\frac{b_1}{n!} + \frac{b_2}{(n-1)!} + \cdots + b_n = -\frac{1}{(n+1)!}.$$

Determinanta sustava iznosi 1 pa se primjenom Cramerovog pravila odredi b_n:

$$b_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2!} \\ \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \cdots & -\frac{1}{3!} \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \cdots & -\frac{1}{4!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-3)!} & \cdots & -\frac{1}{n!} \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \cdots & -\frac{1}{(n+1)!} \end{vmatrix}.$$

Iz osnovnih svojstava determinanti ($n-1$ zamjena stupaca i izlučivanje -1 iz zadnjeg stupca) slijedi:

$$B_n = n!b_n = (-1)^n n! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \cdots & 1 \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Sada iz poznate činjenice da su svi Bernoullijevi brojevi s neparnim indeksom jednaki nula, tj. $B_{2n+1} = 0, n = 1, 2, 3, \ldots$ slijedi da je

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \cdots & 1 \\ \frac{1}{(n+1)!} & \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \frac{1}{2!} \end{vmatrix} = 0 \text{ za } n = 3, 5, 7, \ldots$$

Literatura

[1] H. Chen, Bernoulli numbers via determinants, International Journal of Mathematical Education (2010.)

[2] N. Elezović, Bernoullijevi polinomi, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb (2015.)

[3] N. Larson, The Bernoulli Numbers: A Brief Primer (2019.), https://www.whitman.edu/documents/Academics/Mathematics/2019/Larson-Balof.pdf (zadnji pristup 17.11.2022.)

[4] A. Nuić, Bernoullijevi i Eulerovi polinomi, Završni rad, Osijek (2016.)

[5] M. Ribičić Penava, Antonio Nuić, Bernoullijevi polinomi, Osječki matematički list 18 (2018.)

[6] I. Slapničar, Matematika 1, Kartular (2018.)

[7] D. Žubrinić, Diskretna matematika, Element (2001.)

[8] https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/sums-of-powers-of-positive-integers(zadnji pristup 18.11.2022.)

Ivana Grgić
Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje,
Ruđera Boškovića 32, 21 000 Split, Hrvatska
E-mail adresa: ipletiko@fesb.hr