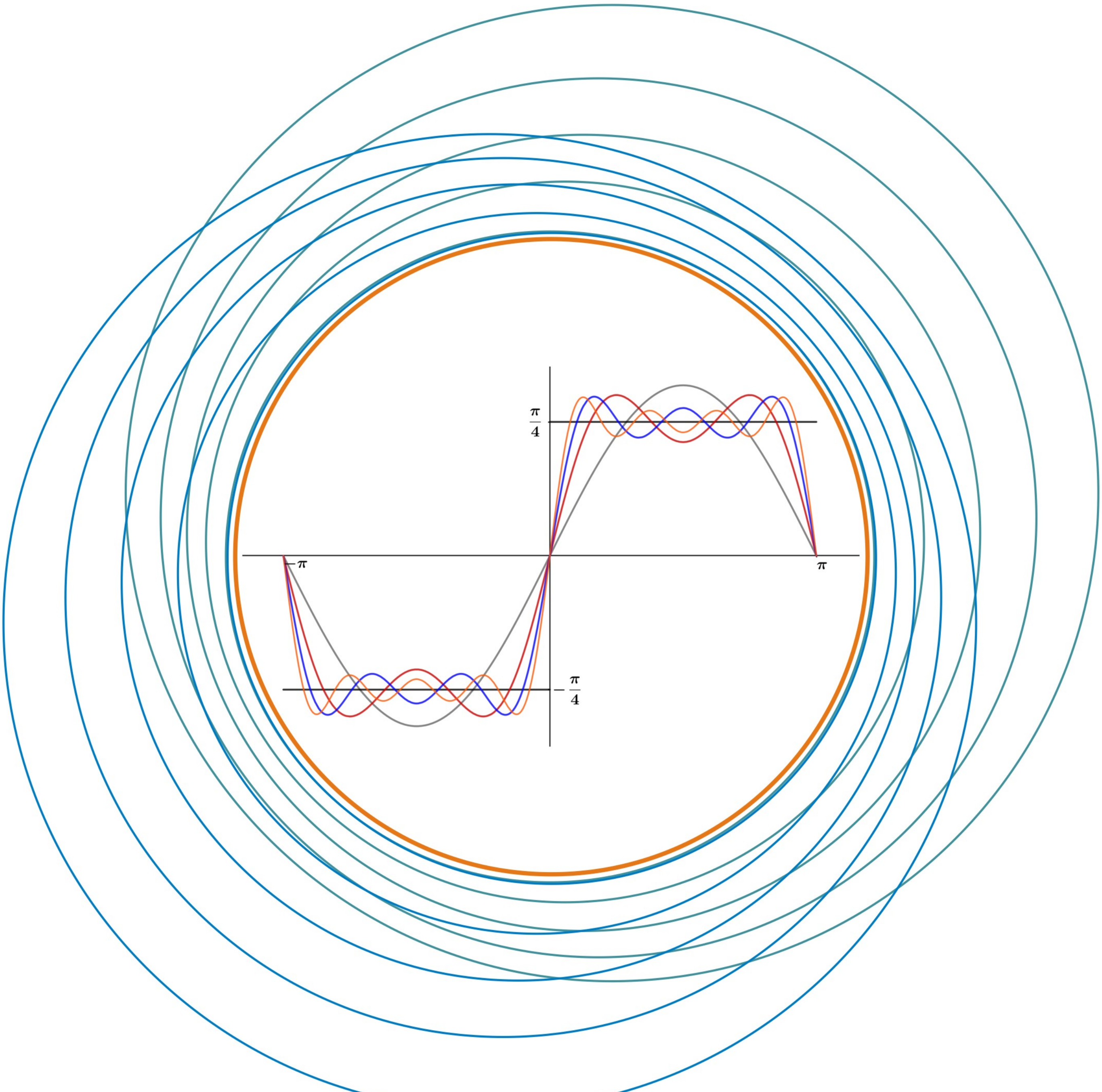
MATEMATIKA 3 Osnovni pojmovi i riješeni zadaci

Grgić, Ivana; Jakovčević Stor, Nevena; De Micheli Vitturi, Petra Marija; Čatipović, Marija

SVEUČILIŠTE U SPLITU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, STROJARSTVA I BRODOGRADNJE U SPLITU



MATEMATIKA 3

N. Jakovčević Stor, I. Grgić, P. M. Gojun, M. Čatipović

MATEMATIKA 3

Osnovni pojmovi i riješeni zadaci

NEVENA JAKOVČEVIĆ - STOR, IVANA GRGIĆ, PETRA MARIJA GOJUN, MARIJA ČATIPOVIĆ / MATEMATIKA 3, OSNOVNI POJMOVI I RIJEŠENI ZADACI

Nakladnik
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE,
STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

Urednik
prof. dr. sc. Vladan Papić

Autori
doc. dr. sc. Nevena Jakovčević-Stor
Ivana Grgić, prof. mat. i inf.
Petra Marija Gojun, mag. math.
Marija Čatipović, mag. math.

Recenzenti
izv. prof. dr. sc. Anita Matković

ISBN 978-953-290-126-9

Prvo izdanje objavljeno u travnju 2023.g.

MATEMATIKA 3, OSNOVNI POJMOVI I RIJEŠENI ZADACI

Nevena Jakovčević Stor, Ivana Grgić, Petra Marija Gojun, Marija Čatipović

Split, 2023.

SADRŽAJ

1 PREDGOVOR

Ova skripta namijenjena je studentima Fakulteta elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Splitu koji pohađaju kolegij Matematika 3. Svrha pisanja skripte bila je objediniti nastavne materijale kolegija, prvenstveno auditornih vježbi. Skripta sadržava nastavno gradivo predviđeno nastavnim planom kolegija u obliku zadatka s auditornih vježbi, zadatka koji su se tijekom godina pojavljivali na kolokvijima i ispitima te teorijskih osnova nužnih za rješavanje zadataka. Nadamo se da će studentima biti korisna u boljem razumijevanju i lakšem savladavanju gradiva.

2 VEKTORSKA ANALIZA

2.1 Osnovni pojmovi

Vektorske funkcije. Limes, derivacija i integral vektorske funkcije.

Vektorska funkcija skalarnog argumenta je funkcija s intervala I u vektorski prostor V^n $(n = 1, 2, 3)$, odnosno $\vec{r} : I \to V^n$.

Za $n = 3$ koristimo oznaku

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in I.$$

$x, y, z : I \to \mathbb{R}$ zovemo **skalarnim komponentama** vektorske funkcije $\vec{r}$.

Neka su zadane vektorska funkcija $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ i vektor $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$. Tada je $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$ ako i samo ako je

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = a_x, \quad \lim_{t\to t_0} y(t) = a_y, \quad \lim_{t\to t_0} z(t) = a_z.$$

Derivacija vektorske funkcije $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ može se računati pomoću derivacija njenih komponenti, tj. vrijedi

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Za funkciju $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b]$, kažemo da je **integrabilna** na segmentu $[a, b]$ ako su njene skalarne komponente $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$ integrabilne na $[a, b]$. Tada je

$$\int_a^b \vec{r}(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t\right)\vec{i} + \left(\int_a^b y(t)\,\mathrm{d}t\right)\vec{j} + \left(\int_a^b z(t)\,\mathrm{d}t\right)\vec{k}.$$

Svojstva derivacije i integrala vektorskih funkcija su slična onima za realne funkcije.

Ako je $\vec{r}(t)$ neprekidna vektorska funkcija i $\vec{s}(t)$ njena **primitivna funkcija** na I, tj. ona za koju vrijedi $\vec{s}'(t) = \vec{r}(t), \forall t \in I$, onda za $a, b \in I$ vrijedi

$$\int_a^b \vec{r}(t)\,\mathrm{d}t = \vec{s}(b) - \vec{s}(a).$$

Skalarna i vektorska polja. Gradijent, divergencija, rotacija i usmjerene derivacije

Skalarno polje je funkcija sa skupa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ u skup $\mathbb{R}$, odnosno $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
Vektorsko polje je funkcija sa skupa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ u skup V^3, odnosno $\vec{a} : \Omega \to V^3$.

Pišemo $\vec{a}(x,y,z) = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k}$ gdje su $a_x, a_y, a_z : \Omega \to \mathbb{R}$, (komponente ili koordinatne funkcije) skalarna polja.

Parcijalne derivacije vektorskog polja se definiraju potpuno analogno parcijalnim derivacijama skalarnog polja (realne funkcije triju varijabli) i svode se na parcijalne derivacije njegovih komponenti:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{a}}{\partial x} &= \frac{\partial a_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial a_y}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial a_z}{\partial x}\vec{k} \\
\frac{\partial \vec{a}}{\partial y} &= \frac{\partial a_x}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial a_z}{\partial y}\vec{k} \\
\frac{\partial \vec{a}}{\partial z} &= \frac{\partial a_x}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial a_y}{\partial z}\vec{j} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\vec{k}
\end{aligned}$$

Ako skalarno ili vektorsko polje ima sve parcijalne derivacije, onda kažemo da je ono derivabilno.

Neka su $f : \Omega \to \mathbb{R}$ i $\vec{a} : \Omega \to V^3$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, derivabilno skalarno i vektorsko polje, redom.

- **Gradijentom** skalarnog polja f nazivamo vektorsko polje $\operatorname{grad} f : \Omega \to V^3$ definirano sa
$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k},$$
- **Divergencijom** vektorskog polja $\vec{a}$ nazivamo skalarno polje $\operatorname{div}\vec{a} : \Omega \to \mathbb{R}$ definirano sa
$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$
- **Rotacijom** vektorskog polja $\vec{a}$ nazivamo vektorsko polje $\operatorname{rot}\vec{a} : \Omega \to V^3$ definirano sa
$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Primjetimo da $\operatorname{rot}\vec{a}$ dopušta formalni zapis u obliku determinante

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Gradijent, divergencija i rotacija mogu se opisati samo jednim operatorom. Znakom ∇ (nabla) označimo tzv. **Hamiltonov diferencijalni operator** - formalni vektor

$$\nabla \equiv \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Na vektorskom prostoru svih derivabilnih skalarnih (vektorskih) polja vrijedi:

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \operatorname{grad} f, && \text{(djelovanje operatora } \nabla \text{ na skalarno polje } f);\\
\nabla \cdot \vec{a} &= \operatorname{div} \vec{a}, && \left(\text{formalni skalarni umnožak } \nabla \text{ i vektorskog polja } \vec{a}\right);\\
\nabla \times \vec{a} &= \operatorname{rot} \vec{a}, && \left(\text{formalni vektorski umnožak } \nabla \text{ i vektorskog polja } \vec{a}\right).
\end{aligned}$$

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

je tzv. **Laplaceov diferencijalni operator** (delta). Ako je f dvaput derivabilno skalarno polje onda je

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2};$$

Ako je $\vec{a}$ dvaput derivabilno vektorsko polje onda je

$$\begin{aligned}
\Delta \vec{a} &= \left(\Delta a_x\right)\vec{i} + \left(\Delta a_y\right)\vec{j} + \left(\Delta a_z\right)\vec{k}\\
&= \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}\right)\vec{j}\\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right)\vec{k}
\end{aligned}$$

Za vektorsko polje $\vec{a} : \Omega \to V^3$ kažemo da je **potencijalno** ako postoji skalarno polje $f : \Omega \to \mathbb{R}$ takvo da je $\vec{a} = -\operatorname{grad} f$. Tada f nazivamo potencijalom polja $\vec{a}$.

Svako vektorsko polje $\vec{a}$ za koje je $\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0}$ nazivamo bezvrtložno, a svako ono za koje je $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ solenoidalno.

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{R}$ derivabilno skalarno polje i $\vec{s} = s_x\vec{i}+s_y\vec{j}+s_z\vec{k}$ jedinični vektor. Tada **derivaciju skalarnog polja** f u točki T_0 u smjeru vektora $\vec{s}$ računamo kao

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(T_0) = \operatorname{grad} f(T_0) \cdot \vec{s} = \left(\vec{s} \cdot \nabla\right) f(T_0).$$

Ako $\vec{s}$ nije jedinični vektor uzmemo jedinični vektor $\vec{s_0} = \dfrac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$ u smjeru vektora $\vec{s}$.

Skalarno polje f najbrže raste u smjeru što ga određuje $\operatorname{grad} f$, a najbrže pada u smjeru što ga određuje $-\operatorname{grad} f$.

Neka je $\vec{a}(x,y,z) = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k}$ derivabilno vektorsko polje na Ω, $\vec{s} = s_x\vec{i}+s_y\vec{j}+s_z\vec{k}$ jedinični vektor i $T_0 \in \Omega$. Tada **derivaciju vektorskog polja** $\vec{a}$ u točki T_0 u smjeru vektora $\vec{s}$ računamo kao

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{a}}{\partial \vec{s}}(T_0) &= \left(s_x\frac{\partial}{\partial x}+s_y\frac{\partial}{\partial y}+s_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{a}\left(T_0\right) = \left(\vec{s} \cdot \nabla\right)\vec{a}\left(T_0\right)\\
&= s_x\frac{\partial \vec{a}}{\partial x}\left(T_0\right) + s_y\frac{\partial \vec{a}}{\partial y}\left(T_0\right) + s_z\frac{\partial \vec{a}}{\partial z}\left(T_0\right).
\end{aligned}$$

Još neke formule:

$$\nabla\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\nabla\left(\vec{a}\cdot\underline{\vec{b}}\right)+\nabla\left(\underline{\vec{a}}\cdot\vec{b}\right)=\vec{b}\times\operatorname{rot}\vec{a}+b\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{b}}+\vec{a}\times\operatorname{rot}\vec{b}+a\frac{\partial\vec{b}}{\partial\vec{a}}$$

$$\nabla\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=b\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{b}}-a\frac{\partial\vec{b}}{\partial\vec{a}}+\vec{a}\operatorname{div}\vec{b}-\vec{b}\operatorname{div}\vec{a}$$

$$\nabla\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{b}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{b}$$

$$\begin{aligned}\Delta f &= \operatorname{div}\operatorname{grad} f\\ \Delta\vec{a} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}\end{aligned}$$

Ostalo:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$$
$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

2.2 Zadaci

1. Krivulja K je presjek plohe $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$ i ravnine $x + y = 1$. Odredite jednu njenu parametrizaciju te vektor smjera tangente u točki $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

2. Izračunajte gradijent skalarnog polja $f(x, y, z) = \ln\frac{yz}{x} + 2$. Odredite točku T za koju je $(\operatorname{grad} f)_T = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

3. Zadano je vektorsko polje $\vec{v} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + xyz\vec{k}$. Izračunajte $\operatorname{div}\vec{v}$ i $\operatorname{rot}\vec{v}$.

4. Izračunajte usmjerenu derivaciju polja $\varphi = xy^2 + z^3 - xyz$ u točki $T(1, 1, 2)$ u smjeru vektora koji s koordinatnim osima zatvara kuteve $60°, 45°$ i $60°$ respektivno.

5. Izračunajte usmjerenu derivaciju vektorskog polja $\vec{a} = xz\vec{i} + 3\vec{j} - y\sqrt{z}\vec{k}$ u točki $T(0, -4, 1)$ u smjeru vektora $\vec{s} = (2, -2, -1)$.

6. Izračunajte $\vec{v}$ ako je $\vec{v} = \operatorname{grad}\left(r^2 \ln r\right)$, gdje je $\vec{r}$ radij-vektor točke $T(x, y, z)$ i r njegova duljina.

7. Izračunajte $\dfrac{\partial\left[r\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)\right]}{\partial\vec{a}}$ ako je $\vec{a}$ konstantan vektor, a $\vec{r}$ radij-vektor točke $T(x, y, z)$.

8. Izračunajte $\nabla\left[\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)\right]$ ako je $\vec{a}$ konstantan vektor, a $\vec{r}$ radij-vektor točke $T(x, y, z)$.

9. Izračunajte $\nabla\left[r\,\nabla\left(r\,\vec{r}\right)\right]$ ako je $\vec{r}$ radij-vektor točke $T(x, y, z)$, $r = \left|\vec{r}\right|$.

10. Izračunajte usmjerenu derivaciju polja $\vec{v} = \operatorname{grad}\left(r^2 \ln r\right)$ u točki $T(\sqrt{3}, 0, 1)$ u smjeru vektora $\vec{k}$.

11. Izračunajte
$$\frac{\partial\Delta\vec{a}}{\partial\vec{s}}$$
ako je $\vec{a} = 2x^2y\vec{i} + 5xy\vec{j} + xy^2\vec{k}$ i $\vec{s} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

12. Izračunajte
$$\nabla\left(\frac{r^2\,\vec{r}}{\vec{a}\cdot\vec{r}}\right)$$
ako je $\vec{a}$ konstantan vektor, a $\vec{r}$ radij-vektor točke $T(x, y, z)$.

13. Izračunajte $\Delta r\,\vec{r}$ ako je $\vec{r}$ radij-vektor točke $T(x, y, z)$, $r = \left|\vec{r}\right|$.

14. Izračunajte
$$\nabla \ln\left\{re^r + \nabla\left[r\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)\right]\right\}$$
ako je $\vec{a}$ konstantan vektor, $\vec{r}$ radij-vektor točke $T(x, y, z)$, a r njegova duljina.

15. Izračunajte
$$\frac{\partial(\sin r\,\vec{r})}{\partial\vec{s}}$$
u točki $T(1, 1, 1)$ ako je $\vec{s} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$.

Rješenja:

1. Krivulja K je presjek plohe $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$ i ravnine $x + y = 1$. Odredite jednu njenu parametrizaciju te vektor smjera tangente u točki $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

   Odredimo projekciju krivulje K na xz ravninu tako da $y = 1 - x$ uvrstimo u jednadžbu prve plohe.

$$\begin{aligned}
&2x^2 + 2(1-x)^2 + z^2 = 2\\
&4x^2 - 4x + z^2 = 0\\
&x^2 - x + \frac{1}{4}z^2 = 0\\
&\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{z^2}{4} = \frac{1}{4}\\
&\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{z^2}{1} = 1
\end{aligned}$$

   Projekcija je pomaknuta elipsa koju možemo parametrizirati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
&x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t,\\
&z(t) = \sin t,\ t \in [0, 2\pi]\,.
\end{aligned}$$

   Još preostaje odrediti $y(t)$

$$\begin{aligned}
y(t) &= 1 - x(t)\\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t
\end{aligned}$$

   pa je time dobivena jedna parametrizacija krivulje K.
   Izjednačavanjem $x(t) = \frac{1}{2}$, $y(t) = \frac{1}{2}$, $z(t) = 1$ dobijemo parametar t_0 koji odgovara točki A. Dakle, $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Derivacije komponenata su $x'(t) = \frac{-1}{2}\sin t$, $y'(t) = \frac{1}{2}\sin t$, $z'(t) = \cos t$. Vektor smjera tangente u točki A je

$$\vec{s} = \frac{-1}{2}\sin t_0\,\vec{i} + \frac{1}{2}\sin t_0\,\vec{j} + \cos t_0\,\vec{k} = \frac{-1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}.$$

2. Izračunajte gradijent skalarnog polja $f(x, y, z) = \ln\dfrac{yz}{x} + 2$. Odredite točku T za koju je $(\operatorname{grad} f)_T = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \frac{-1}{x}\vec{i} + \frac{1}{y}\vec{j} + \frac{1}{z}\vec{k}$$

   Znamo da su dva vektora jednaka ako su im jednake odgovarajuće komponente, stoga dobivamo:

$$\frac{-1}{x} = 2 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$$
$$\frac{1}{y} = -1 \Rightarrow y = -1$$
$$\frac{1}{z} = 3 \Rightarrow z = \frac{1}{3}.$$

Tražena točka je $T\left(\frac{-1}{2}, -1, \frac{1}{3}\right)$.

3. Zadano je vektorsko polje $\vec{v} = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} + xyz\,\vec{k}$. Izračunajte $\operatorname{div}\vec{v}$ i $\operatorname{rot}\vec{v}$.

Divergencija vektorskog polja je skalarno polje koje računamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{\partial y} + \frac{\partial xyz}{\partial z} \\ &= 2x + 2y + xy.\end{aligned}$$

Rotacija vektorskog polja je vektorsko polje koje računamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & xyz \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}\left(\frac{\partial xyz}{\partial y} - \frac{\partial y^2}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial xyz}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial y^2}{\partial x} - \frac{\partial x^2}{\partial y}\right) \\ &= xz\,\vec{i} - yz\,\vec{j}.\end{aligned}$$

4. Izračunajte usmjerenu derivaciju polja $\varphi = xy^2 + z^3 - xyz$ u točki $T(1,1,2)$ u smjeru vektora koji s koordinatnim osima zatvara kuteve $60°, 45°$ i $60°$ respektivno.

Derivaciju skalarnog polja φ u točki T u smjeru jediničnog vektora $\vec{s}$ računamo pomoću $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{s}}(T) = \operatorname{grad}\varphi(T)\cdot\vec{s}$. Jedinični vektor $\vec{s}$ koji s kooordinatnim osima zatvara kuteve $60°, 45°$ i $60°$ respektivno jednak je

$$\vec{s} = \cos 60°\,\vec{i} + \cos 45°\,\vec{j} + \cos 60°\,\vec{k} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}.$$

Gradijent skalarnog polja φ je

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k} = (y^2 - yz)\,\vec{i} + (2xy - xz)\,\vec{j} + (3z^2 - xy)\,\vec{k}.$$

Sada je

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{s}} = \left((y^2 - yz)\vec{i} + (2xy - xz)\vec{j} + (3z^2 - xy)\vec{k}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}\right)$$
$$= \frac{y^2 - yz}{2} + \frac{\sqrt{2}\,(2xy - xz)}{2} + \frac{3z^2 - xy}{2}.$$

Konačno, vrijednost u točki T iznosi $\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{s}}(1,1,2) = 5$.

5. Izračunajte usmjerenu derivaciju vektorskog polja $\vec{a} = xz\,\vec{i} + 3\,\vec{j} - y\sqrt{z}\,\vec{k}$ u točki $T(0,-4,1)$ u smjeru vektora $\vec{s} = (2,-2,-1)$.

Jedinični vektor u smjeru vektora $\vec{s}$ je vektor $\vec{s_0} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}$. Derivaciju vektorskog polja $\vec{a}$ u smjeru vektora $\vec{s}$ računamo pomoću

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{s}} = \left(\vec{s_0} \cdot \operatorname{grad}\left(a_x\right)\right)\vec{i} + \left(\vec{s_0} \cdot \operatorname{grad}\left(a_y\right)\right)\vec{j} + \left(\vec{s_0} \cdot \operatorname{grad}\left(a_z\right)\right)\vec{k}.$$

Gradijenti skalarnih komponenti su

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}\left(a_x\right) &= \operatorname{grad}(xz) = z\,\vec{i} + x\,\vec{k},\\
\operatorname{grad}\left(a_y\right) &= \operatorname{grad}(3) = \vec{0},\\
\operatorname{grad}\left(a_z\right) &= \operatorname{grad}\left(-y\sqrt{z}\right) = -\sqrt{z}\,\vec{j} - \tfrac{y}{2\sqrt{z}}\,\vec{k}.
\end{aligned}$$

Sada možemo izračunati

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{s}} = \left(\vec{s_0} \cdot \left(z\,\vec{i} + x\,\vec{k}\right)\right)\vec{i} + \left(\vec{s_0} \cdot \vec{0}\right)\vec{j} + \left(\vec{s_0} \cdot \left(-\sqrt{z}\,\vec{j} - \frac{y}{2\sqrt{z}}\,\vec{k}\right)\right)\vec{k}$$
$$= \left(\frac{2}{3}z - \frac{1}{3}x\right)\vec{i} + \left(\frac{2}{3}\sqrt{z} + \frac{y}{6\sqrt{z}}\right)\vec{k}$$
$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{s}}(0,-4,1) = \frac{2}{3}\vec{i}.$$

6. Izračunajte $\vec{v}$ ako je $\vec{v} = \operatorname{grad}\left(r^2 \ln r\right)$, gdje je $\vec{r}$ radij-vektor točke $T(x,y,z)$ i r njegova duljina.

Radi jednostavnijeg računa koristimo Hamiltonov operator ∇.

$$\begin{aligned}
\vec{v} = \nabla\left(r^2 \ln r\right) &= \nabla\left(r^2 \underline{\ln r}\right) + \nabla\left(\underline{r^2} \ln r\right)\\
&= (\ln r)\nabla(r^2) + r^2\nabla(\ln r) = (\ln r)\,2r\,\vec{r_0} + r^2\,\frac{1}{r}\,\vec{r_0}\\
&= (\ln r)\,2r\,\frac{\vec{r}}{r} + r\,\frac{\vec{r}}{r} = (2\ln r + 1)\,\vec{r}.
\end{aligned}$$

7. Izračunajte $\dfrac{\partial\left[r\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)\right]}{\partial\vec{a}}$ ako je $\vec{a}$ konstantan vektor, a $\vec{r}$ radij-vektor točke $T(x, y, z)$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left[r\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)\right]}{\partial\vec{a}} &= \overrightarrow{a_0}\cdot\operatorname{grad}\left(r\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)\right)\\
&= \overrightarrow{a_0}\cdot\nabla\left(r\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)\right)\\
&= \overrightarrow{a_0}\cdot\nabla\left(r\underline{\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)}\right)+\overrightarrow{a_0}\cdot\nabla\left(\underline{r}\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)\right)\\
&= \overrightarrow{a_0}\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)\nabla r+\overrightarrow{a_0}\,r\,\nabla\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)\\
&= \overrightarrow{a_0}\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)\overrightarrow{r_0}+\overrightarrow{a_0}\,r\,\vec{a}\\
&= \overrightarrow{a_0}\cdot\overrightarrow{r_0}\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)+r\left(\overrightarrow{a_0}\cdot\vec{a}\right)\\
&= \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{a\,r}\,\vec{a}\cdot\vec{r}+r\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{a}}{a}\right)\\
&= \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{a\,r}\,\vec{a}\cdot\vec{r}+a\,r
\end{aligned}
$$

pri čemu smo koristili

$$
\begin{aligned}
\nabla\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right) &= \vec{r}\times\operatorname{rot}\vec{a}+\vec{a}\times\operatorname{rot}\vec{r}+r\,\frac{\partial\vec{a}}{\partial\vec{r}}+a\,\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vec{a}}\\
&= \vec{r}\times\vec{0}+\vec{a}\times\vec{0}+r\,\vec{0}+a\,\overrightarrow{a_0}\\
&= \vec{a}.
\end{aligned}
$$

8. Izračunajte $\nabla\left[\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)\right]$ ako je $\vec{a}$ konstantan vektor, a $\vec{r}$ radij-vektor točke $T(x, y, z)$.

Primijetimo da nabla djeluje na vektorsko polje, što znači da računamo divergenciju polja $\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)$.

$$
\begin{aligned}
\nabla\left[\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)\right] &= \nabla\left[\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)\underline{\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)}\right]+\nabla\left[\underline{\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)}\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)\right]\\
&= \left(\vec{a}\times\vec{r}\right)\cdot\nabla\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)+\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)\nabla\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)\\
&= \left(\vec{a}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{a}+\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)\left(\vec{r}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}-\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{r}\right)\\
&= 0+\left(\vec{r}\cdot\vec{0}-\vec{a}\cdot\vec{0}\right)=0+0=0.
\end{aligned}
$$

9. Izračunajte $\nabla\left[r\,\nabla\left(r\,\vec{r}\right)\right]$ ako je $\vec{r}$ radij-vektor točke $T(x, y, z)$, $r=\left|\vec{r}\right|$.

Izračunajmo prvo: $\nabla\left(r\,\vec{r}\right)=\nabla\left(r\,\underline{\vec{r}}\right)+\nabla\left(\underline{r}\,\vec{r}\right)=\vec{r}\cdot\nabla r+r\,\nabla\vec{r}=\vec{r}\cdot\overrightarrow{r_0}+3r=4r.$

$$
\nabla\left[r\,\nabla\left(r\,\vec{r}\right)\right]=\nabla\left(4r^2\right)=8r\,\overrightarrow{r_0}=8\,\vec{r}.
$$

10. Izračunajte usmjerenu derivaciju polja $\vec{v} = \operatorname{grad}\left(r^2 \ln r\right)$ u točki $T(\sqrt{3}, 0, 1)$ u smjeru vektora $\vec{k}$.

Usmjerenu derivaciju vektorskog polja u smjeru jediničnog vektora $\vec{k}$ računamo korištenjem novog operatora $\vec{s_0} \cdot \nabla$. Ovdje je $\vec{s_0} = \vec{k}$. U 6. zadatku smo izračunali da je $\vec{v} = (2\ln r + 1)\vec{r}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{k}} &= \left(\vec{k} \cdot \nabla\right)\vec{v} = \left(\vec{k} \cdot \nabla\right)(2\ln r + 1)\vec{r} \\
&= \left(\vec{k} \cdot \nabla\right)(2\ln r + 1)\underline{\vec{r}} + \left(\vec{k} \cdot \nabla\right)\left(\underline{2\ln r + 1}\right)\vec{r} \\
&= \vec{r}\left[\vec{k} \cdot \nabla(2\ln r + 1)\right] + (2\ln r + 1)\left(\vec{k} \cdot \nabla\right)\vec{r} \\
&= \vec{r}\left[\vec{k}\left(\frac{2}{r}\vec{r_0}\right)\right] + (2\ln r + 1)\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{k}} \\
&= \vec{r}\left(\vec{k} \cdot \vec{r}\,\frac{2}{r^2}\right) + (2\ln r + 1)\,\vec{k}.
\end{aligned}$$

U ovom postupku je jako važno paziti na to da ne vrijedi svojstvo asocijativnosti za skalarno množenje vektora. Prema tome vektor $\vec{r}$ u četvrtoj liniji ne množi vektor $\vec{r_0}$. Prvo se mora izvršiti skalarno množenje unutar uglate zagrade $\vec{r_0} \cdot \vec{k}$, a zatim vektor $\vec{r}$ pomnožiti tako dobivenim skalarom.
Radij-vektor točke T je $\vec{r}_T = \vec{r} = \sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{k}$ duljine $r = 2$. Stoga imamo:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{k}}\left(\sqrt{3}, 0, 1\right) = \frac{\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{k}}{2} + (2\ln 2 + 1)\,\vec{k}.$$

11. Izračunajte

$$\frac{\partial \Delta \vec{a}}{\partial \vec{s}}$$

ako je $\vec{a} = 2x^2y\,\vec{i} + 5xy\,\vec{j} + xy^2\,\vec{k}$ i $\vec{s} = \vec{i} + 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$.

Budući da je $\vec{a}$ vektorsko polje primijenit ćemo:

$$\Delta \vec{a} = \nabla\nabla\vec{a} - \nabla \times \left(\nabla \times \vec{a}\right).$$

Imamo da je $\nabla\vec{a} = 4xy + 5x$, a $\nabla \times \vec{a} = 2xy\,\vec{i} - y^2\,\vec{j} + \left(5y - 2x^2\right)\vec{k}$

$$\begin{aligned}
\Delta \vec{a} &= \nabla(4xy + 5x) - \nabla \times \left(2xy\vec{i} - y^2\vec{j} + (5y - 2x^2)\vec{k}\right) \\
&= (4y + 5)\,\vec{i} + 4x\,\vec{j} - \left(5\,\vec{i} + 4x\,\vec{j} - 2x\,\vec{k}\right) \\
&= 4y\,\vec{i} + 2x\,\vec{k} = \vec{a}\,'.
\end{aligned}$$

Za računanje usmjerene derivacije vektorskog polja $\Delta\vec{a} = \vec{a}\,'$ odredimo:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}\left(a'_x\right) &= \operatorname{grad}(4y) = 4\,\vec{j}, \\
\operatorname{grad}\left(a'_y\right) &= \operatorname{grad} 0 = \vec{0}, \\
\operatorname{grad}\left(a'_z\right) &= \operatorname{grad}(2x) = 2\,\vec{i}.
\end{aligned}$$

Jedinični vektor u smjeru vektora $\vec{s}$ je $\vec{s_0} = \frac{1}{\sqrt{14}}\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right)$ i konačno je

$$\frac{\partial \Delta \vec{a}}{\partial \vec{s}} = \left(\vec{s_0}\, 4\vec{j}\right)\vec{i} + \left(\vec{s_0} \cdot \vec{0}\right)\vec{j} + \left(\vec{s_0}\, 2\vec{i}\right)\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{14}}\left(8\vec{i} + 2\vec{k}\right).$$

12. Izračunajte

$$\nabla\left(\frac{r^2\vec{r}}{\vec{a}\cdot\vec{r}}\right)$$

ako je $\vec{a}$ konstantan vektor, a $\vec{r}$ radij-vektor točke $T(x, y, z)$.

Nabla djeluje na vektorsko polje i kao rezultat moramo dobiti skalarno polje. Izraz unutar zagrade ćemo drugačije zapisati tako da odvojimo skalarna od vektorskih polja radi preglednijeg zapisa. Koristit ćemo $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$.

$$\begin{aligned}
\nabla\left(\frac{r^2\vec{r}}{\vec{a}\cdot\vec{r}}\right) &= \nabla\left(\frac{r^2}{\vec{a}\cdot\vec{r}}\vec{r}\right) = \nabla\left(\frac{r^2}{\vec{a}\cdot\vec{r}}\underline{\vec{r}}\right) + \nabla\left(\underline{\frac{r^2}{\vec{a}\cdot\vec{r}}}\vec{r}\right)\\
&= \vec{r}\cdot\nabla\left(\frac{r^2}{\vec{a}\cdot\vec{r}}\right) + \frac{r^2}{\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)}\nabla\vec{r}\\
&= \vec{r}\frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)\nabla r^2 - r^2\nabla\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)}{\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)^2} + \frac{r^2}{\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)}3\\
&= \vec{r}\cdot\frac{2\vec{r}\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right) - r^2\vec{a}}{\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)^2} + \frac{3r^2}{\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)}\\
&= \frac{2r^2\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right) - r^2\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)}{\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)^2} + \frac{3r^2}{\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)}\\
&= \frac{r^2}{\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)} + \frac{3r^2}{\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)} = \frac{4r^2}{\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)}.
\end{aligned}$$

13. Izračunajte $\Delta r\vec{r}$ ako je $\vec{r}$ radij-vektor točke $T(x, y, z)$, $r = \left|\vec{r}\right|$.

Koristit ćemo rezultate iz 9. zadatka.

$$\begin{aligned}
\Delta r\vec{r} &= \nabla\nabla r\vec{r} - \nabla\times\left(\nabla\times r\vec{r}\right)\\
&= \nabla(4r) - \nabla\times\left[\nabla r\times\vec{r} + r\left(\nabla\times\vec{r}\right)\right]\\
&= 4\vec{r_0} - \nabla\times\left(\vec{r_0}\times\vec{r} + r\vec{0}\right) = 4\vec{r_0} - \nabla\times\vec{0}\\
&= 4\vec{r_0} - \vec{0} = 4\vec{r_0}.
\end{aligned}$$

14. Izračunajte

$$\nabla \ln \left\{ re^r + \nabla \left[r \left(\vec{a} \times \vec{r} \right) \right] \right\}$$

ako je $\vec{a}$ konstantan vektor, $\vec{r}$ radij-vektor točke $T(x, y, z)$, a r njegova duljina.

Izračunajmo prvo $\nabla \left[r \left(\vec{a} \times \vec{r} \right) \right]$, pri čemu ćemo koristiti rezultate iz 8. zadatka.

$$\begin{aligned} \nabla \left[r \left(\vec{a} \times \vec{r} \right) \right] &= \left(\vec{a} \times \vec{r} \right) \nabla r + r \nabla \left(\vec{a} \times \vec{r} \right) \\ &= \left(\vec{a} \times \vec{r} \right) \vec{r_0} + r\, 0 = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Sada je

$$\nabla \ln \left\{ re^r + \nabla \left[r \left(\vec{a} \times \vec{r} \right) \right] \right\} = \nabla \ln \left(re^r \right) = \frac{1}{re^r} \left(e^r + re^r \right) \vec{r_0} = \frac{1+r}{r^2} \vec{r}.$$

15. Izračunajte

$$\frac{\partial (\sin r \, \vec{r})}{\partial \vec{s}}$$

u točki $T(1, 1, 1)$ ako je $\vec{s} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right)$.

Vektor $\vec{s}$ je jedinični vektor.

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\sin r \, \vec{r})}{\partial \vec{s}} &= \left(\vec{s} \cdot \nabla \right) \left(\sin r \, \vec{r} \right) = \left(\vec{s} \cdot \nabla \right) \left(\sin r \, \underline{\vec{r}} \right) + \left(\vec{s} \cdot \nabla \right) \left(\underline{\sin r} \, \vec{r} \right) \\ &= \vec{r} \left[\vec{s} \left(\nabla \sin r \right) \right] + \sin r \, \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{s}} = \vec{r} \left(\vec{s} \left(\cos r \, \vec{r_0} \right) \right) + \sin r \, \vec{s}. \end{aligned}$$

Radij-vektor točke T je $\vec{r}_T = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Uočimo

$$\left(\vec{r_0} \right)_T = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right) = \vec{s} = \vec{s_0}$$

i $\vec{s_0} \cdot \vec{r_0} = 1$ iz čega slijedi $\dfrac{\partial (\sin r \, \vec{r})}{\partial \vec{s}} = \vec{r} \cos r + \vec{s_0} \sin r$.

Konačno je

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\sin r \, \vec{r})}{\partial \vec{s}}(1, 1, 1) &= \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right) \cos \sqrt{3} + \frac{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}} \sin \sqrt{3} \\ &= \left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \right) \left(\cos \sqrt{3} + \frac{\sin \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

3 KRIVULJNI INTEGRAL

3.1 Osnovni pojmovi

Krivuljni integral prve vrste

Neka je $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [a,b]$ vektorska funkcija i neka je krivulja $\Gamma = \{T(x(t), y(t), z(t)) \mid t \in [a,b]\}$ njen graf.

Uređeni par $\left([a,b], \vec{r}(t)\right)$ zove se **parametrizacija krivulje** Γ.

Za krivulju $\Gamma \ldots \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [a,b]$, kažemo da je **jednostavna glatka krivulja** ili **Jordanov luk** ako vrijedi:

1. $\vec{r}$ je neprekidna injekcija na $[a,b]$,
2. derivacija $\vec{r}'(t)$ postoji za svako $t \in [a,b]$ i neprekidna je,
3. $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ za svako $t \in [a,b]$.

Ako je $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, onda krivulju zovemo zatvorenom krivuljom.

Neka je Jordanov luk Γ zadan parametrizacijom

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a,b],$$

i neka je na njemu zadano skalarno polje $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $(\Gamma \subset \Omega)$. Ako je funkcija

$$t \mapsto f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}, \quad t \in [a,b],$$

integrabilna, onda pripadni određeni integral

$$\int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, \mathrm{d}t = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot \left|\vec{r}'(t)\right| \mathrm{d}t$$

nazivamo **integralom skalarnoga polja** f **po krivulji** Γ (ili **krivuljnim integralom prve vrste**) i označavamo sa

$$\int_\Gamma f \, \mathrm{d}s.$$

- Krivuljni integral prve vrste ne ovisi o odabranoj parametrizaciji krivulje.
- U slučaju kada je Γ po dijelovima Jordanov luk $(\Gamma = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_n)$ vrijedi

$$\int_\Gamma f\,ds \overset{\text{def.}}{=} \int_{\Gamma_1} f\,ds + \cdots + \int_{\Gamma_n} f\,ds.$$

Krivuljni integral druge vrste

Neka je dano vektorsko polje $\vec{a} : \Omega \to V_O^3$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, te neka je orijentirani Jordanov luk $\overset{\frown}{\Gamma} = \overset{\frown}{AB} \subset \Omega$ zadan parametrizacijom $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [a, b]$. Ako je funkcija

$$t \mapsto a_x(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) + a_y(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) + a_z(x(t), y(t), z(t))\, z'(t),$$

$t \in [a, b]$ integrabilna, onda pripadni određeni integral

$$\int_a^b a_x(x(t), y(t), z(t))\, x'(t) + a_y(x(t), y(t), z(t))\, y'(t) + a_z(x(t), y(t), z(t))\, z'(t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_a^b \left[\vec{a}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\right] \mathrm{d}t$$

nazivamo **integralom vektorskoga polja $\vec{a}$ po orijentiranoj krivulji $\overset{\frown}{\Gamma} = \overset{\frown}{AB}$**
(ili **krivuljnim integralom druge vrste**) i označavamo sa

$$\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

- $\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$;
- $\int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} (\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \lambda \int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \mu \int\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} \vec{b} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

  gdje su $\vec{a}, \vec{b}$ integrabilna vektorska polja, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\overset{\frown}{\Gamma} = \overset{\frown}{AB}$ orijentirana po dijelovima glatka krivulja.

Vektorsko polje $\vec{a} : \Omega \to V_O^3$ je **potencijalno** ili **konzervativno** ako postoji skalarno polje $f : D \to R$ takvo da je $\vec{a} = \operatorname{grad} f$. Polje f je potencijal polja $\vec{a}$.

- Krivuljni integral vektorskog polja $\vec{a} : \Omega \to V_O^3$ ne ovisi o putu integracije već samo o početnoj i krajnjoj točki ako i samo ako je $\vec{a}$ potencijalno polje.
- Na konveksnom skupu Ω vrijedi

  $$\vec{a} = \operatorname{grad} f \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rot} \vec{a} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \oint\limits_{\overset{\frown}{\Gamma}} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0, \quad \forall \overset{\frown}{\Gamma}.$$

Neka su $P, Q : X \to \mathbb{R}$ diferencijabilne funkcije na otvorenom skupu $X \subseteq \mathbb{R}^2$ te neka je $\widehat{\Gamma} \subset X$ pozitivno orijentirani zatvoreni po dijelovima Jordanov luk. Tada vrijedi tzv. **Greenova formula**

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \oint\limits_{\widehat{\Gamma}} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

pri čemu je $D \subseteq X$ područje omeđeno krivuljom Γ, tj. $\partial D = \Gamma$.
(∂D je oznaka za rub skupa D).

3.2 Zadaci

1. Izračunajte vrijednost integrala
$$I = \int\limits_K (x-y)\,\mathrm{d}s$$
ako je krivulja K kružnica $x^2 + y^2 = 3x$.

2. Izračunajte vrijednost integrala
$$I = \int\limits_K (x+y)\,\mathrm{d}s$$
ako je krivulja K trokut s vrhovima $A(1,0)$, $B(0,1)$ i $C(0,0)$.

3. Izračunajte
$$I = \int\limits_K \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right)\,\mathrm{d}s$$
ako je krivulja K astroida dana jednadžbama $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.

4. Izračunajte
$$I = \int\limits_K \left(x^2 + y^2\right)\,\mathrm{d}s$$
ako je krivulja K presjek ploha $x^2 + 2y^2 = 4$ i $z = y$, $y \geq 1$.

5. Izračunajte vrijednost integrala
$$I = \int\limits_K (y-1)\,\mathrm{d}x$$
ako je K dio krivulje $x^2 + y^2 = 2x + 2y$ koja se nalazi u prvom kvadrantu, prijeđena u pozitivnom smjeru.

6. Izračunajte
$$I = \int\limits_K ye^{xy}\,\mathrm{d}x + (x + xe^{xy})\,\mathrm{d}y$$
ako je K pozitivno orijentirana gornja polukružnica $x^2 + y^2 = 1$.

7. Izračunajte vrijednost integrala
$$I = \int\limits_K (2a - y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$$
ako je krivulja K cikloida dana jednadžbama $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

8. Pokažite da je polje
$$\vec{a} = \frac{yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}}{1 + x^2y^2z^2}$$
potencijalno i odredite potencijal. Izračunajte $\int\limits_{(0,1,1)}^{(1,1,1)} \vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$.

9. Odredite konstante a, b i c tako da vektorsko polje

$$\vec{a} = (x + 2y + az)\,\vec{i} + (bx - 3y - z)\,\vec{j} + (4x + cy + 2z)\,\vec{k}$$

bude potencijalno.

10. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int_K y\,\mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x + \mathrm{tg}x\,\mathrm{d}y$$

ako je K kružnica $x^2 + (y + 1)^2 = 1$ prijeđena u pozitivnom smjeru.

11. Izračunajte

$$I = \int_K (y - z)\,\mathrm{d}x + (z - x)\,\mathrm{d}y + (x - z)\,\mathrm{d}z$$

ako je krivulja K dio pravca od točke $A(1, -1, 2)$ do $B(2, 0, 1)$.

12. Izračunajte

$$I = \int_K \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}x + \left(x^2 - y^2\right)\mathrm{d}y$$

ako je K dio krivulje $y = 1 - |1 - x|$, za $0 \leq x \leq 2$.

13. Pomoću Greenove formule izračunajte

$$I = \int_K y^3\,\mathrm{d}x + xy^2\,\mathrm{d}y,$$

gdje je K pozitivno orijentirana krivulja koja zatvara lik omeđen parabolama $y = x^2$ i $x = y^2$.

Rješenja:

1. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int_K (x - y)\,\mathrm{d}s$$

ako je krivulja K kružnica $x^2 + y^2 = 3x$.

Krivulja K je kružnica $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ čija parametrizacija je dana sa:

$$x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos t,$$
$$y = \frac{3}{2}\sin t.$$

Računamo:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\sin t\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\cos t\right)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\,\mathrm{d}t,$$

$$I = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \frac{3}{2}(1 + \cos t - \sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{9}{4}\cdot 2\pi = \frac{9\pi}{2}.$$

2. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int_K (x + y)\,\mathrm{d}s$$

ako je krivulja K trokut s vrhovima $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ i $C(0, 0)$.

Integral je potrebno rastaviti na tri integrala tako da integriramo po svakoj stranici trokuta.

Stranica K_{CA} je dio x osi za $x \in [0, 1]$. Ovdje je $x = x, y = 0, \mathrm{d}s = \mathrm{d}x$.

Stranica K_{CB} je dio y osi za $y \in [0, 1]$. Ovdje je $x = 0, y = y, \mathrm{d}s = \mathrm{d}y$.

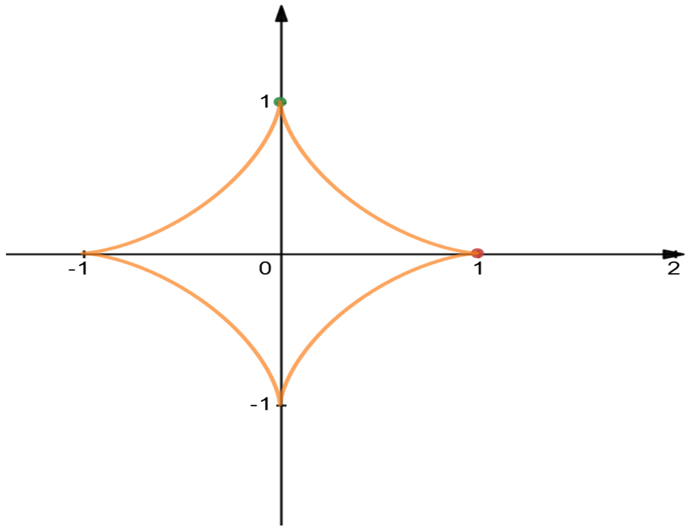
Stranica K_{AB} je dio pravca $y = 1 - x$ za $x \in [0, 1]$. Ovdje je $x = x, y = 1 - x, \mathrm{d}s = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x$.

$$I = I_{K_{CA}} + I_{K_{CB}} + I_{K_{AB}} = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x + \int_0^1 y\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \sqrt{2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

3. Izračunajte

$$I = \int_K \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right) \mathrm{d}s$$

ako je krivulja K astroida dana jednadžbama $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in [0, 2\pi]$.



Slika 1: Astroida ($a = 1$)

Prvo izračunajmo derivacije funkcija x i y:

$$x'(t) = -3a\cos^2 t \sin t, \quad y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t,$$

a zatim je

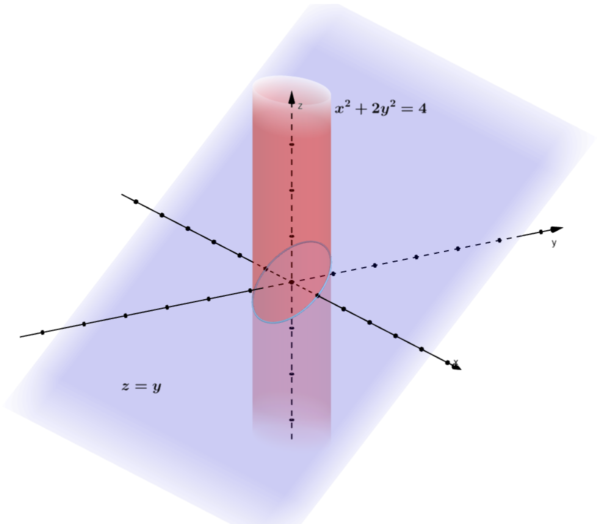
$$\begin{aligned} \mathrm{d}s &= \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{9a^2\sin^2 t\cos^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}\,\mathrm{d}t \\ &= 3a\sin t\cos t,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{4}{3}}\left(\cos^4 t + \sin^4 t\right) 3a\sin t\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= 12a^{\frac{7}{3}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t\sin t\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t\cos t\,\mathrm{d}t\right] = \cdots = 4a^{\frac{7}{3}}. \end{aligned}$$

4. Izračunajte

$$I = \int_K \left(x^2 + y^2\right)\, \mathrm{d}s$$

ako je krivulja K presjek ploha $x^2 + 2y^2 = 4$ i $z = y$, $y \geq 1$.



Slika 2: Presjek cilindra i ravnine

Projekcija prostorne krivulje K na xy ravninu je dio elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$. Parametrizirajmo projekciju i izrazimo z preko novih funkcija x i y:

$$\begin{aligned} x &= 2\cos t, \\ y &= \sqrt{2}\sin t, \\ z &= \sqrt{2}\sin t, \\ \mathrm{d}s &= \sqrt{4\sin^2 t + 2\cos^2 t + 2\cos^2 t}\, \mathrm{d}t = 2\, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Kako bismo pronašli granice za parametar t iskoristimo $y \geq 1$. Prema tome je $\sin t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, odnosno $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Sada je

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(4\cos^2 t + 2\sin^2 t\right) 2\, \mathrm{d}t = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(2 + 2\cos^2 t\right) \mathrm{d}t = \cdots = 3\pi - 2.$$

5. Izračunajte vrijednost integrala

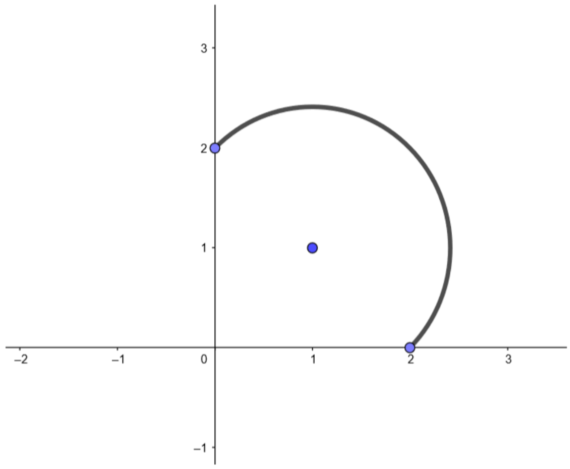
$$I = \int_K (y-1)\, \mathrm{d}x$$

ako je K dio krivulje $x^2 + y^2 = 2x + 2y$ koja se nalazi u prvom kvadrantu, prijeđena u pozitivnom smjeru.

Jednadžbu $x^2 + y^2 = 2x + 2y$ trebamo zapisati u standardnom obliku, tj. dopuniti izraze $x^2 - 2x$ i $y^2 - 2y$ do kvadrata binoma:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2.$$

Ovo je jednadžba kružnice sa središtem u točki $(1, 1)$ radijusa $\sqrt{2}$.



Slika 3: Dio kružnice u prvom kvadrantu

Promatramo samo dio kružnice koji se nalazi u prvom kvadrantu. Parametrizirajmo ga:

$$\begin{aligned} x - 1 &= \sqrt{2}\cos t, \quad & \mathrm{d}x &= -\sqrt{2}\sin t\,\mathrm{d}t, \\ y - 1 &= \sqrt{2}\sin t, \quad & \mathrm{d}y &= \sqrt{2}\cos t\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Potrebno je još odrediti granice za parametar t iz čega će biti jasno da se radi o dijelu kružnice u prvom kvadrantu. Za točku u kojoj kružnica presijeca x-os vrijedi da je $y = 0$. Uvrstimo $y = 0$ u parametrizaciju i dobijemo $\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ pa je $t = \frac{-\pi}{4}$. Slično, za točku u kojoj kružnica presijeca y-os vrijedi da je $x = 0$ i $\cos t = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, a iz čega slijedi $t = \frac{3\pi}{4}$. Sada možemo računati vrijednost integrala I:

$$I = \int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{2}\sin t\left(-\sqrt{2}\sin t\right)\mathrm{d}t = -2\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = -\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \cdots = -\pi.$$

6. Izračunajte

$$I = \int_K ye^{xy}\,\mathrm{d}x + (x + xe^{xy})\,\mathrm{d}y$$

ako je K pozitivno orijentirana gornja polukružnica $x^2 + y^2 = 1$.

Parametrizacija pozitivno orijentirane jedinične centralne gornje polukružnice je dana sa:

$$\begin{aligned} x &= \cos t, \quad & \mathrm{d}x &= -\sin t\,\mathrm{d}t, \\ y &= \sin t, \quad & \mathrm{d}y &= \cos t\,\mathrm{d}t, \ t \in [0, \pi]\,. \end{aligned}$$

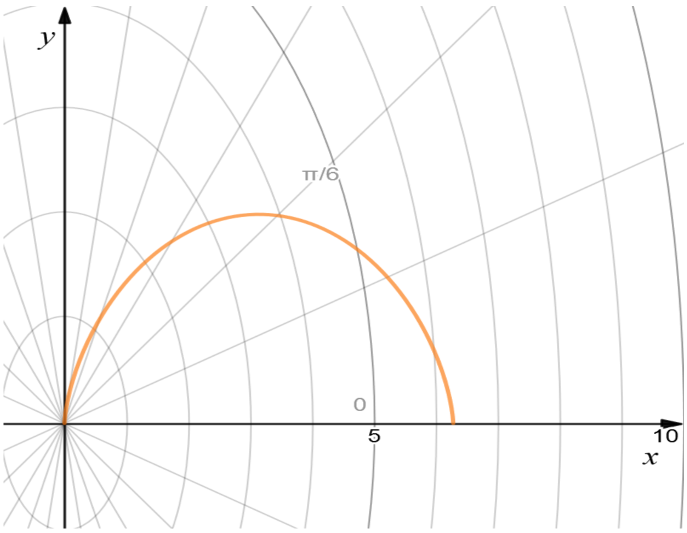
Sve uvrstimo u integral i računamo:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \sin t e^{\sin t \cos t} (-\sin t)\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi \cos t \cos t\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi \cos t e^{\sin t \cos t} \cos t\,\mathrm{d}t \\ &= \left\{ \text{ u prvom i zadnjem integralu izlučimo eksponencijalnu funkciju } \right\} \\ &= \int_0^\pi e^{\sin t \cos t} \left(\cos^2 t - \sin^2 t\right) \mathrm{d}t + \int_0^\pi \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi e^{\frac{1}{2}\sin 2t} \cos 2t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left\{ \text{ uvedemo supstituciju } \frac{1}{2}\sin 2t = z \right\} = \cdots = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

7. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int_K (2a - y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$$

ako je krivulja K cikloida dana jednadžbama $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.



Slika 4: Cikloida ($a = 1$)

Budući da je jednadžba krivulje već dana u parametarskom obliku kao i granice za t možemo odmah računati vrijednost integrala:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} [(2a - a + a\cos t)\, a\,(1-\cos t) + a\,(t - \sin t)\, a \sin t]\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left[a^2 (1+\cos t)(1-\cos t) + a^2 \left(t \sin t - \sin^2 t\right)\right] \mathrm{d}t \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 t + t \sin t - \sin^2 t\right) \mathrm{d}t \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t \, \mathrm{d}t = \left\{ \text{parcijalna integracija} \right\} = \cdots = -2a^2\pi.
\end{aligned}$$

8. Pokažite da je polje

$$\vec{a} = \frac{yz\,\vec{i} + zx\,\vec{j} + xy\,\vec{k}}{1 + x^2y^2z^2}$$

potencijalno i odredite potencijal. Izračunajte $\int\limits_{(0,1,1)}^{(1,1,1)} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$.

Vidimo da je

$$P = \frac{yz}{1+x^2y^2z^2},\ Q = \frac{zx}{1+x^2y^2z^2},\ R = \frac{xy}{1+x^2y^2z^2}.$$

Provjerimo jesu li parcijalne derivacije u parovima jednake:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{z\left(1+x^2y^2z^2\right) - yz2yx^2z^2}{\left(1+x^2y^2z^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{y\left(1+x^2y^2z^2\right) - yz2zx^2y^2}{\left(1+x^2y^2z^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{x\left(1+x^2y^2z^2\right) - zx2zx^2y^2}{\left(1+x^2y^2z^2\right)^2}.$$

Zaključujemo da je polje potencijalno. Stoga integral polja $\vec{a}$ ne ovisi o putu integracije. Potencijal $u(x, y, z)$ računamo prema

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t,y,z)\, dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,u,z)\, du + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,v)\, dv + C$$

pa je

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) &= \int\limits_0^x \frac{yz}{1+t^2y^2z^2}\mathrm{d}t + \int\limits_0^y \frac{z\cdot 0}{1+0^2u^2z^2}\mathrm{d}u + \int\limits_0^z \frac{0\cdot 0}{1+0^20^2v^2}\mathrm{d}v + C \\
&= \int\limits_0^x \frac{yz}{1+t^2y^2z^2}\mathrm{d}t + C = \left\{ \begin{array}{c} \text{supst. } tyz = k \\ yz\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}k, t\to 0, k\to 0, t\to x, k\to xyz \end{array} \right\} \\
&= \int\limits_0^{xyz} \frac{\mathrm{d}k}{1+k^2} + C = \operatorname{arctg} k \Big|_0^{xyz} = \operatorname{arctg} xyz + C
\end{aligned}$$

i

$$\int\limits_{(0,1,1)}^{(1,1,1)} \vec{a}\,\mathrm{d}\vec{r} = u(1,1,1) - u(0,1,1) = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

9. Odredite konstante a, b i c tako da vektorsko polje

$$\vec{a} = (x+2y+az)\vec{i} + (bx-3y-z)\vec{j} + (4x+cy+2z)\vec{k}$$

bude potencijalno.

Možemo izračunati rot $\vec{a}$ i izjednačiti s $\vec{0}$ ili napraviti kao u prethodnom zadatku:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial P}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = b, \text{ pa je } b = 2, \\
&\frac{\partial P}{\partial z} = a, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 4, \text{ pa je } a = 4, \\
&\frac{\partial Q}{\partial z} = -1, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = c, \text{ pa je } c = -1.
\end{aligned}$$

10. Izračunajte vrijednost integrala

$$I = \int\limits_K y\operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x + \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}y$$

ako je K kružnica $x^2 + (y+1)^2 = 1$ prijeđena u pozitivnom smjeru.

Budući da je K zatvorena, ravninska krivulja koja omeđuje područje D može se primjeniti Greenova formula.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x = 1,$$

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Ovaj dvostruki integral računa površinu područja D, u ovom slučaju površinu kruga radijusa 1. Dakle,

$$I = \pi.$$

11. Izračunajte

$$I = \int_{\overrightarrow{K}} (y - z)\,\mathrm{d}x + (z - x)\,\mathrm{d}y + (x - z)\,\mathrm{d}z$$

ako je krivulja K dio pravca od točke $A(1, -1, 2)$ do $B(2, 0, 1)$.

Jednadžba pravca koji prolazi točkama A i B glasi:

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y + 1}{0 - (-1)} = \frac{z - 2}{1 - 2},$$

odnosno

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 2}{-1}.$$

U parametarskom obliku za $t \in [0, 1]$ je:

$$\begin{aligned} x &= t + 1, \qquad & \mathrm{d}x &= \mathrm{d}t, \\ y &= t - 1, & \mathrm{d}y &= \mathrm{d}t, \\ z &= -t + 2, & \mathrm{d}z &= -\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 [(t - 1 + t - 2) + (-t + 2 - t - 1) + (t + 1 + t - 2)(-1)]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (-2t - 1)\,\mathrm{d}t = -2. \end{aligned}$$

12. Izračunajte

$$I = \int_K \left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}x + \left(x^2 - y^2\right)\mathrm{d}y$$

ako je krivulja K ... $y = 1 - |1 - x|$, za $0 \le x \le 2$.

Prvo zapišimo jednadžbu krivulje K prikladnije:

$$y = \begin{cases} x, & \text{ako je } 1 - x \ge 0 \\ 2 - x, & \text{ako je } 1 - x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \le 1 \\ 2 - x, & \text{ako je } x > 1. \end{cases}$$

Sada je očito da moramo integral rastaviti u dva dijela; integral po dijelu pravca $y = x$ (označimo taj dio pravca K_1), za $x \in [0,1]$ i integral po dijelu pravca $y = 2 - x$ (K_2), za $x \in [1,2]$.

Parametrizacija za K_1 je dana sa:

$$\begin{aligned} x &= x, \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}x, \\ y &= x, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}x, \ x \in [0,1], \end{aligned}$$

a za K_2:

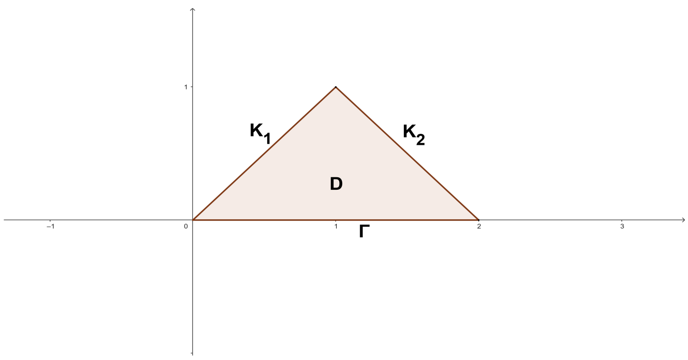
$$\begin{aligned} x &= x, \qquad \mathrm{d}x = \mathrm{d}x, \\ y &= 2 - x, \quad \mathrm{d}y = -\mathrm{d}x, \ x \in [1,2]. \end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{K_1} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x + \left(x^2 - y^2\right) \mathrm{d}y + \int\limits_{K_2} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x + \left(x^2 - y^2\right) \mathrm{d}y \\ &= \int\limits_0^1 2x^2 \,\mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \left[\left(x^2 + 4 - 4x + x^2\right) - \left(x^2 - 4 + 4x - x^2\right)\right] \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 + \int\limits_1^2 \left(2x^2 - 8x + 8\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 8x\right)\Big|_1^2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Primjetimo da u zadatku orijentacija krivulje nije posebno naglašena. Mi smo ga riješili orijentirajući krivulju negativno (u smjeru gibanja kazaljke na satu).

Zadatak smo mogli riješiti i pomoću Greenove formule iako krivulja nije zatvorena, tako da primijenimo Greenovu formulu na područje D koje je trokut iznad x osi i od dobivenog rezultata oduzmemo $\int\limits_{\Gamma} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x + \left(x^2 - y^2\right) \mathrm{d}y$, gdje je Γ dio x osi za $x \in [0,2]$.



Slika 5: Područje D

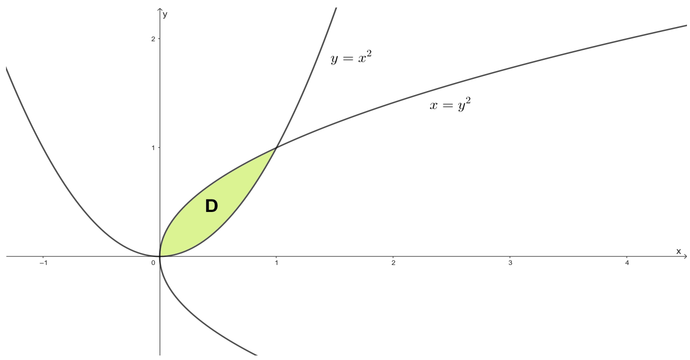
$$
\begin{aligned}
I &= \iint\limits_D (2x-2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int\limits_\Gamma \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x + \left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^x (2x-2y)\,\mathrm{d}y + \int\limits_1^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^{2-x} (2x-2y)\,\mathrm{d}y - \int\limits_0^2 x^2\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3} + 1 - \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

Na ovaj način je konačni rezultat negativan jer je krivulja, prema pretpostavci Greenovog teorema, pozitivno orijentirana.

13. Pomoću Greenove formule izračunajte

$$
I = \int\limits_K y^3\,\mathrm{d}x + xy^2\,\mathrm{d}y,
$$

gdje je K pozitivno orijentirana krivulja koja zatvara lik omeđen parabolama $y = x^2$ i $x = y^2$.



Slika 6: Područje D

Budući da je

$$
P(x,y) = y^3 \;\Rightarrow\; \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2
$$

$$
Q(x,y) = xy^2 \;\Rightarrow\; \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2
$$

prema Greenovoj formuli vrijedi

$$
\begin{aligned}
I &= \int\limits_K y^3\,\mathrm{d}x + xy^2\,\mathrm{d}y = \iint\limits_D \left(y^2 - 3y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_D \left(-2y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (-2y^2)\,\mathrm{d}y \\
&= -\frac{2}{3}\int\limits_0^1 y^3\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\int\limits_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^6\right)\mathrm{d}x = -\frac{6}{35}.
\end{aligned}
$$

4 PLOŠNI INTEGRAL

4.1 Osnovni pojmovi

Plošni integral prve vrste

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^2$ područje (otvoren i povezan skup) u xOy ravnini i $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1 na D (f ima neprekidne parcijalne derivacije na D). Tada je skup

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y), \quad (x, y) \in D\}$$

glatka ploha u prostoru $\mathbb{R}^3$ ($z = f(x, y)$ je njena eksplicitna jednadžba).

Ako je S glatka ploha zadana eksplicitnom jednadžbom $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, onda je njezina **površina**

$$P(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Neka je $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidno skalarno polje, a $S \subset \Omega$ glatka ploha zadana jednadžbom $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, na zatvorenom području D omeđenom po dijelovima glatkom zatvorenom krivuljom. Tada dvostruki integral

$$\iint\limits_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

nazivamo **plošnim integralom skalarnoga polja f po plohi S** (ili **plošnim integralom prve vrste**) i označavamo sa

$$\iint\limits_S f\, \mathrm{d}S.$$

Ako je ploha S po dijelovima glatka i sastavljena od konačno mnogo glatkih ploha $S_1, \cdots, S_n$ onda se njezin plošni integral prve vrste definira kao pripadni zbroj, tj.

$$\iint\limits_S f\, \mathrm{d}S = \iint\limits_{S_1} f\, \mathrm{d}S_1 + \cdots + \iint\limits_{S_n} f\, \mathrm{d}S_n.$$

Plošni integral prve vrste je linearan:

$$\iint_S (\lambda f + \mu g)\, \mathrm{d}S = \lambda \iint_S f\, \mathrm{d}S + \mu \iint_S g\, \mathrm{d}S.$$

gdje su $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^3$, neprekidne funkcije, $S \subseteq X$ po dijelovima glatka ploha i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Plošni integral druge vrste

Neka je $\vec{a} : \Omega \to V_O^3,\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ neprekidno vektorsko polje, a $z = g(x, y), (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, jednadžba orijentirane glatke plohe $S \subset \Omega$, pri čemu je D zatvoreno područje čiji je rub po dijelovima glatka zatvorena krivulja. Tada dvostruki integral

$$\iint\limits_D \left(-a_x \frac{\partial g}{\partial x} - a_y \frac{\partial g}{\partial y} + a_z\right)_{(x,y,g(x,y))} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

nazivamo **plošnim integralom vektorskoga polja $\vec{a}$ po orijentiranoj plohi $\overset{\frown}{S}$** (ili **plošnim integralom druge vrste**) i označavamo sa

$$\iint\limits_{\overset{\frown}{S}} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \quad \text{ili} \quad \iint\limits_S \vec{a} \cdot \vec{n_0}\,\mathrm{d}S.$$

Plošni integral druge vrste se još naziva **tokom vektorskoga polja $\vec{a}$ kroz plohu S**.

Neka su $\vec{a}, \vec{b} : \Omega \to V_O^3,\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ neprekidna vektorska polja, $S \subset \Omega$ orijentirana po dijelovima glatka ploha i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada je:

1) $\iint\limits_{\overset{\frown}{S}} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\iint\limits_{\overset{\frown}{S}} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$;

2) $\iint\limits_{\overset{\frown}{S}} (\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \lambda \iint\limits_{\overset{\frown}{S}} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \mu \iint\limits_{\overset{\frown}{S}} \vec{b} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$.

Zadamo li formalno jedinične vektore normale na S pomoću njihovih kosinusa smjera

$$\vec{n_0} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k},$$

pripadni plošni integral druge vrste ima zapis

$$\iint\limits_{\overset{\frown}{S}} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint\limits_S (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)\,\mathrm{d}S.$$

Može se izvesti još jedan zapis plošnog integrala druge vrste. Neka su dani neprekidna skalarna polja $P, Q, R : \Omega \to \mathbb{R},\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ i orijentirana glatka ploha $S \subset \Omega$, te neka je

$$\vec{n_0} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$$

jedinični vektor normale na odabranu stranu S^+ plohe S. Tada je pripadni plošni integral druge vrste

$$\iint\limits_{S^+} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S.$$

Teorem o divergenciji: Neka je $\vec{a} : \Omega \to V_O^3$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ vektorsko polje klase C^1 na Ω, a $V \subseteq \Omega$ zatvoreno područje omeđeno po dijelovima glatkom zatvorenom plohom $\widehat{S} \equiv \partial\widehat{V}$ orijentiranom vanjskim normalama. Tada vrijedi Ostrogradski-Gaussova formula

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{a}\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{\partial\widehat{V}} \vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{S}.$$

Ostrogradski-Gaussovu formulu možemo zapisati i u skalarnoj formi. Neka su $P, Q, R : \Omega \to \mathbb{R}$ skalarna polja klase C^1 na okolini Ω zatvorenog područja $V \subset \mathbb{R}^3$, čiji je rub ∂V po dijelovima glatka zatvorena ploha. Tada je

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint\limits_{\partial V} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S,$$

gdje su $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ kosinusi smjerova vanjske normale na plohu ∂V.

Ova formula omogućuje pretvaranje plošnog integrala po zatvorenoj plohi u trostruki integral po području koje ta ploha omeđuje.

Teorem o gradijentu: Neka je skalarno polje $f : \Omega \to \mathbb{R}$ klase C^1 na Ω. Tada vrijedi

$$\iiint\limits_V \operatorname{grad} f\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{\partial V} f\,\vec{n_0}\,\mathrm{d}S$$

$$= \vec{i}\iint\limits_{\partial V} f\cos\alpha\,\mathrm{d}S + \vec{j}\iint\limits_{\partial V} f\cos\beta\,\mathrm{d}S + \vec{k}\iint\limits_{\partial V} f\cos\gamma\,\mathrm{d}S.$$

Teorem o rotaciji: Neka je vektorsko polje $\vec{a} : \Omega \to V_O^3$ klase C^1 na Ω. Tada vrijedi

$$\iiint\limits_V \operatorname{rot}\vec{a}\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{\partial V} \vec{n_0}\times\vec{a}\,\mathrm{d}S.$$

Teorem o Laplaceovom operatoru: Neka je skalarno polje $f : \Omega \to \mathbb{R}$ klase C^2 na Ω. Tada vrijedi

$$\iiint\limits_V \Delta f\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{\partial V} \left(\operatorname{grad} f\cdot\vec{n_0}\right)\mathrm{d}S.$$

Stokesova formula je poopćenje Greenove formule na prostorno vektorsko polje $\vec{a}$, plohu $S \subset \mathbb{R}^3$ i njezin rub ∂S.

Neka je dana orijentabilna ploha S čiji je rub po dijelovima glatka krivulja ∂S. Kažemo da su ploha i njezin rub koherentno orijentirani, ako, gledano s vrha vektora normale na plohu u nekoj točki, orijentacija krivulje nalaže kretanje po krivulji u pozitivnom smjeru, tj. suprotno gibanju kazaljke na satu.

Stokesov teorem: Neka je $\vec{a} : \Omega \to V_O^3$ vektorsko polje klase C^1 na $\mathbb{R}^3$, $\widehat{S} \subset \Omega$ orijentirana po dijelovima glatka ploha, a $\partial\overset{\curvearrowleft}{S}$ koherentno joj orijentirani rub koji je po dijelovima glatka zatvorena krivulja. Tada vrijedi **Stokesova formula**

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{n_0} \, \mathrm{d}S = \iint_{\widehat{S}} \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_{\partial\widehat{S}} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

I za Stokesovu formulu često se koristi skalarni zapis. Neka su $P, Q, R : \Omega \to \mathbb{R}$ skalarna polja klase C^1 na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, $S \subset \Omega$ po dijelovima glatka ploha s koherentno orijentiranim rubom ∂S koji je po dijelovima glatka zatvorena krivulja te $\cos\alpha$, $\cos\beta$ i $\cos\gamma$ kosinusi smjerova vektora normale na plohu S. Tada je

$$\oint_{\partial S} P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y + R \, \mathrm{d}z$$

$$= \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right) \mathrm{d}S.$$

4.2 Zadaci

1. Izračunajte
$$\iint\limits_S y\,\mathrm{d}S$$
gdje je S dio ravnine $\frac{x}{2}+y+\frac{z}{3}=1$ u prvom oktantu.

2. Izračunajte
$$\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S$$
ako je S dio sfere $x^2+y^2+(z-3)^2=4$ za koji je $z\leq 2$.

3. Neka je S dio stošca $x=\sqrt{y^2+z^2}$ za koji je $x\leq 2$. Izračunajte
$$\iint\limits_S y^2\,\mathrm{d}S.$$

4. Izračunajte
$$\iint\limits_S \left(xy+z^2\right)\mathrm{d}S$$
ako je S dio stošca $z=\sqrt{x^2+y^2}$ isječen cilindrom $x^2+y^2=2x$.

5. Izračunajte
$$\iint\limits_S (x+y+z)\,\mathrm{d}S$$
ako je S dio plohe $x^2+y^2=1$ koji se nalazi između ravnina $z=0$ i $z=2$.

6. Izračunajte površinu dijela plohe $z=5x^2+5y^2$ za koji je $0\leq z\leq 5$.

7. Izračunajte tok vektorskog polja
$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+2z^2\vec{k}$$
kroz vanjsku stranu ruba tijela koje je omeđeno plohama $z=2(x^2+y^2)$ i $z=2$.

8. Izračunajte
$$\iint\limits_S (x-z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$
ako je S gornji dio ravnine $x-2y-z+2=0$ isječen koordinatnim ravninama.

9. Izračunajte
$$\iint\limits_S \sqrt{z}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
ako je S vanjska strana dijela plohe $z=x^2+y^2$ za koji je $0\leq z\leq 4$.

10. Izračunajte tok vektorskog polja
$$\vec{a} = xz\,\vec{i} + yz\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$$
kroz vanjski dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ odsječen ravninom $z = 1$, a za $z \geq 1$.

11. Primjenom formule Gauss-Ostrogradskog nađite tok vektorskog polja
$$\vec{a} = x\,\vec{i} + 2y^2\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$$
po plohi koja omeđuje područje $V = \{(x, y, z) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

12. Izračunajte
$$\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
ako je S vanjska strana ruba tijela zadanog nejednakostima $z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ i $z \geq x^2 + y^2$.

13. Uz pomoć Stokesove formule izračunajte
$$I = \int\limits_{\vec{K}} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$
vektorskog polja $\vec{a} = y\,\vec{i} - x\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ po zatvorenoj krivulji K zadanoj kao sjecište ploha $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ i $x^2 + y^2 = z^2$, za $z \geq 0$.

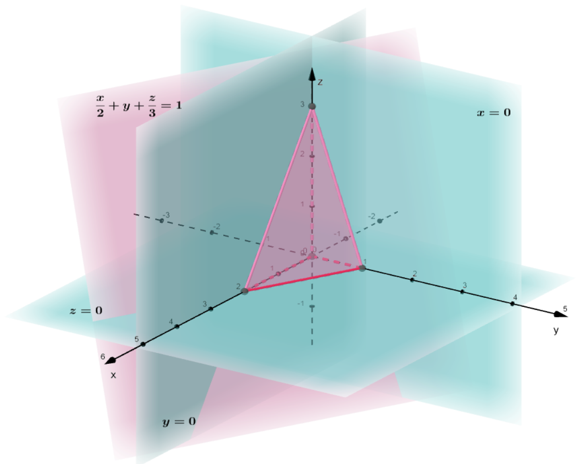
14. Izračunajte cirkulaciju vektorskog polja
$$\vec{a} = zy^2\,\vec{i} + xz^2\,\vec{j} + yx^2\,\vec{k}$$
duž krivulje $K \ldots \begin{cases} x = y^2 + z^2 \\ x = 9 \end{cases}$.

Rješenja:

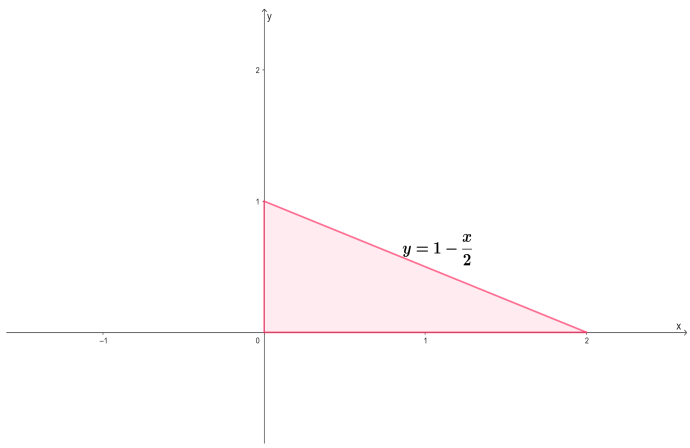
1. Izračunajte

$$\iint_S y \, \mathrm{d}S$$

gdje je S dio ravnine $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{3} = 1$ u prvom oktantu.



Slika 7: Dio ravnine isječen koordinatnim ravninama



Slika 8: Projekcija plohe S na xy ravninu

Jednadžbu plohe možemo zapisati eksplicitno kao $z = g(x, y) = 3 - \frac{3}{2}x - 3y$ te odrediti njenu projekciju S_{xy} na xy ravninu. Tada su granice za x i y:

$$0 \leq x \leq 2$$
$$0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}.$$

Element površine plohe je

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{1 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + (-3)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{7}{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

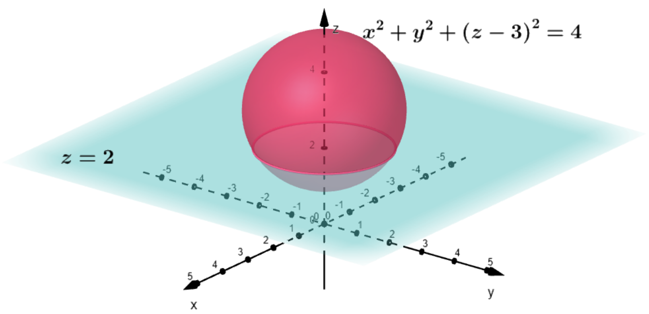
Sada je traženi integral

$$\iint\limits_S y\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{S_{xy}} y \cdot \frac{7}{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{7}{2}\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{1-\frac{x}{2}} y\,\mathrm{d}y = \frac{7}{2}\int_0^2 \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{7}{6}.$$

2. Izračunajte

$$\iint\limits_S z\,\mathrm{d}S$$

ako je S dio sfere $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4$ za koji je $z \leq 2$.



Slika 9: Presjek sfere i ravnine

Odredimo projekciju S_{xy} plohe S na xy ravninu. Presjek sfere i ravnine $z = 2$ je:

$$\begin{array}{c} x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4 \\ z = 2 \\ \hline x^2 + y^2 = 3 \end{array}$$

iz čega slijedi da je projekcija dana sa $S_{xy} \ldots x^2 + y^2 \leq 3$.

Sada još trebamo z izraziti pomoću x i y:

$$\begin{aligned}(z-3)^2 &= 4-x^2-y^2\\ z &= 3\pm\sqrt{4-x^2-y^2}.\end{aligned}$$

Budući da je ploha dio donje polusfere biramo $z = 3 - \sqrt{4-x^2-y^2}$.

Nadalje, jednadžbu plohe možemo zapisati implicitno ($F(x,y,z) = 0$) kao

$$x^2+y^2+(z-3)^2-4=0$$

pa računamo:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S &= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2(z-3))^2}}{|2(z-3)|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \frac{\sqrt{4(x^2+y^2+(z-3)^2)}}{2|z-3|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{4\cdot 4}}{2|3-\sqrt{4-x^2-y^2}-3|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Sada je

$$I = \iint\limits_S z\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{S_{xy}} \left(3-\sqrt{4-x^2-y^2}\right)\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Kako je $S_{xy} \ldots x^2+y^2 \leq 3$ prelazimo na polarne koordinate:

$$\begin{aligned}x &= r\cos\varphi \qquad & 0 \leq r \leq \sqrt{3}\\ y &= r\sin\varphi \qquad & 0 \leq \varphi \leq 2\pi\\ J &= r\end{aligned}$$

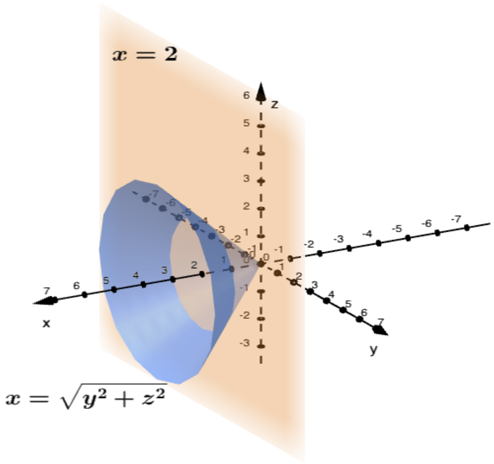
pa je

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\left(3-\sqrt{4-r^2}\right)\frac{2}{\sqrt{4-r^2}}\,r\,\mathrm{d}r = 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{3r}{\sqrt{4-r^2}}-r\right)\mathrm{d}r\\ &= 2\int_0^{2\pi}\left(-3\sqrt{4-r^2}-\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}\varphi = 6\pi.\end{aligned}$$

3. Neka je S dio stošca $x = \sqrt{y^2+z^2}$ za koji je $x \leq 2$. Izračunajte

$$\iint\limits_S y^2\,\mathrm{d}S.$$

Jednadžbu plohe možemo zapisati eksplicitno kao $x = g(y,z) = \sqrt{y^2+z^2}$ te odrediti njenu projekciju S_{yz} na yz ravninu: $S_{yz} \ldots y^2+z^2 \leq 4$.



Slika 10: Presjek stošca i ravnine

Element površine plohe je

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{2y}{2\sqrt{y^2+z^2}}\right)^2 + \left(\frac{2z}{2\sqrt{y^2+z^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sqrt{2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Sada je

$$I = \iint\limits_S y^2\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{S_{yz}} y^2\sqrt{2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

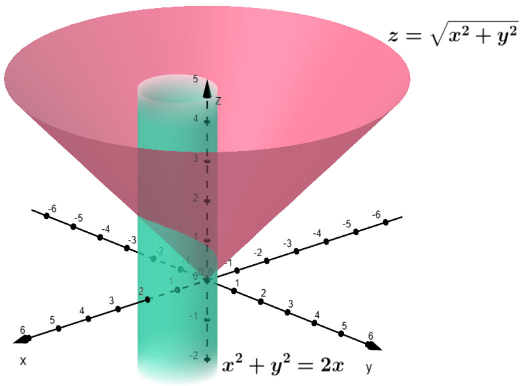
Kako je $S_{yz} \ldots y^2 + z^2 \leq 4$ prelazimo na polarne koordinate:

$$\begin{aligned} y &= r\cos\varphi \qquad & 0 \leq r \leq 2 \\ z &= r\sin\varphi \qquad & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ J &= r \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^2 (r\cos\varphi)^2 r\,\mathrm{d}r = 4\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 4\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = 4\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

4. Izračunajte
$$\iint_S \left(xy + z^2\right) \mathrm{d}S$$
ako je S dio stošca $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ isječen cilindrom $x^2 + y^2 = 2x$.



Slika 11: Dio stošca isječen cilindrom

Ploha je zadana eksplicitno s $z = g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Računamo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Možemo naći projekciju S_{xy} plohe S na xy ravninu tako da jednadžbu cilindra zapišemo u standardnom obliku (dopunimo izraze do kvadrata binoma):

$$\begin{aligned}
x^2 - 2x + y^2 = 0 \\
(x - 1)^2 + y^2 = 1,
\end{aligned}$$

pa je projekcija dana sa $S_{xy} \ldots (x - 1)^2 + y^2 \leq 1$. Sada je

$$I = \iint_S \left(xy + z^2\right) \mathrm{d}S = \iint_{S_{xy}} \left(xy + \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2\right) \sqrt{2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Kako je S_{xy} pomaknuti krug prelazimo na pomaknute polarne koordinate:

$$\begin{aligned}
x - 1 &= r\cos\varphi \qquad & 0 \leq r \leq 1 \\
y &= r\sin\varphi \qquad & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\
J &= r
\end{aligned}$$

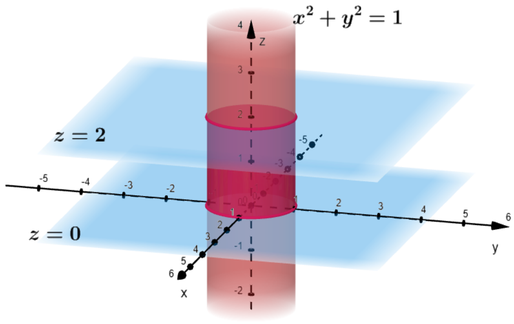
pa je

$$
\begin{aligned}
I &= \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^1 \left((1+r\cos\varphi)r\sin\varphi + (1+r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2\right) r\,\mathrm{d}r \\
&= \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^1 \left(r^2\sin\varphi + r^3\cos\varphi\sin\varphi + r + 2r^2\cos\varphi + r^3\right) \mathrm{d}r \\
&= \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}\sin\varphi + \frac{1}{4}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cos\varphi + \frac{1}{4}\right) \mathrm{d}\varphi = \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi.
\end{aligned}
$$

5. Izračunajte

$$\iint\limits_S (x+y+z)\,\mathrm{d}S$$

ako je S dio plohe $x^2+y^2=1$ koji se nalazi između ravnina $z=0$ i $z=2$.

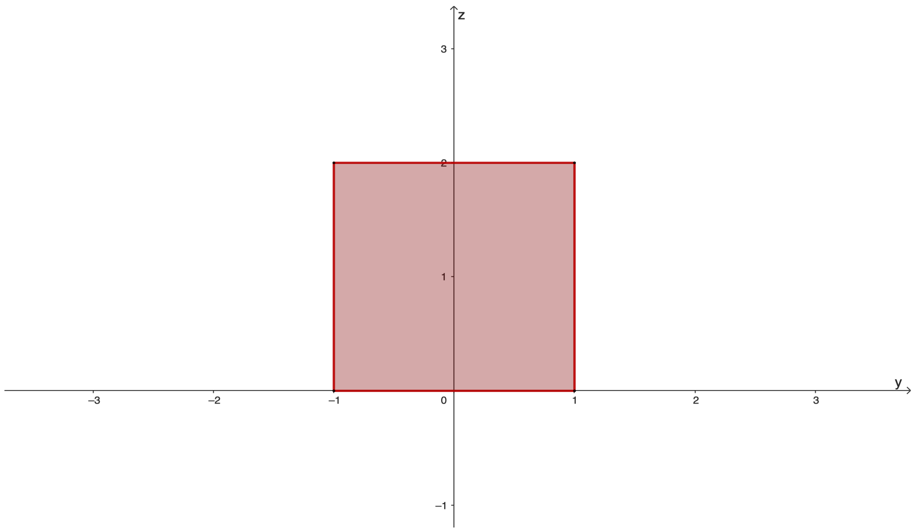


Slika 12: Dio cilindra između dvije ravnine

Projekcija plohe S na xy ravninu je krivulja. Stoga moramo odabrati projekciju na neku drugu koordinatnu ravninu.

Projekcija S_{yz} plohe S na yz ravninu je pravokutnik s vrhovima $(1,0)$, $(1,2)$, $(-1,2)$ i $(-1,0)$. Uočimo, to je ujedno i projekcija plohe S_1 dobivene od plohe S za $x \geq 0$ i projekcija plohe S_2 dobivene od plohe S za $x \leq 0$. Stoga ćemo integral I računati kao zbroj plošnih integrala po dvije plohe, tj. $I = I_1 + I_2$:

1) $S_1 \ldots x = +\sqrt{1-y^2}$



Slika 13: Projekcija plohe S na yz ravninu

Iz implicitne jednadžbe plohe $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ računamo element površine plohe kao

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}S &= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 0^2}}{|2x|}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \{x \geq 0\} = \frac{\sqrt{4(x^2 + y^2)}}{2x}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint\limits_{S_1} (x + y + z)\,\mathrm{d}S = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int\limits_{0}^{2} \left(\sqrt{1 - y^2} + y + z\right) \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\,\mathrm{d}z \\
&= \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \left(z\sqrt{1 - y^2} + yz + \frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^2 \,\mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{1} \frac{2\sqrt{1 - y^2} + 2y + 2}{\sqrt{1 - y^2}}\,\mathrm{d}y \\
&= \int\limits_{-1}^{1} \left(2 + \frac{2y}{\sqrt{1 - y^2}} + \frac{2}{\sqrt{1 - y^2}}\right) \mathrm{d}y \\
&= \left(2y - \frac{2}{3}\left(1 - y^2\right)^{\frac{3}{2}} + 2\arcsin y\right)\Big|_{-1}^{1} = 4 + 2\pi.
\end{aligned}$$

2) $S_2 \ldots x = -\sqrt{1 - y^2}$

Iz implicitne jednadžbe plohe $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ računamo element površine plohe kao

$$\mathrm{d}S = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 0^2}}{|2x|}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \{x \le 0\} = \frac{\sqrt{4(x^2 + y^2)}}{-2x}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{-(-\sqrt{1-y^2})}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Sada je

$$I_2 = \iint\limits_{S_2} (x + y + z)\,\mathrm{d}S = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int\limits_{0}^{2} \left(-\sqrt{1-y^2} + y + z\right) \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}z$$
$$= \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \left(-z\sqrt{1-y^2} + yz + \frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^2 \mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{1} \frac{-2\sqrt{1-y^2} + 2y + 2}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y$$
$$= \int\limits_{-1}^{1} \left(-2 + \frac{2y}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\right)\mathrm{d}y$$
$$= \left(-2y - \frac{2}{3}\left(1-y^2\right)^{\frac{3}{2}} + 2\arcsin y\right)\Big|_{-1}^{1} = -4 + 2\pi.$$

Konačno,

$$I = I_1 + I_2 = 4 + 2\pi - 4 + 2\pi = 4\pi.$$

6. Izračunajte površinu dijela plohe $z = 5x^2 + 5y^2$ za koji je $0 \le z \le 5$.

$$P(S) = \iint\limits_{S} \mathrm{d}S.$$

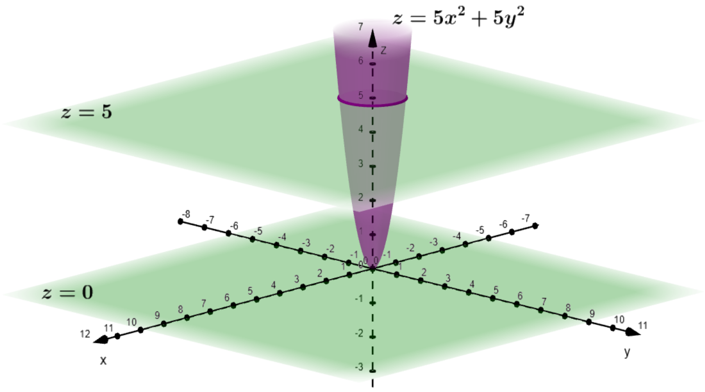
Ploha je zadana eksplicitno s $z = g(x, y) = 5x^2 + 5y^2$, a projekcija S_{xy} plohe S na xy ravninu je dana sa $S_{xy} \ldots x^2 + y^2 \le 1$.

Element površine plohe je

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{1 + 100x^2 + 100y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Nakon uvođenja centralnih polarnih koordinata dobivamo:

$$P(S) = \iint\limits_{S_{xy}} \sqrt{1 + 100x^2 + 100y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \int_0^{1} \sqrt{1 + 100r^2}r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{150}\left(101^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

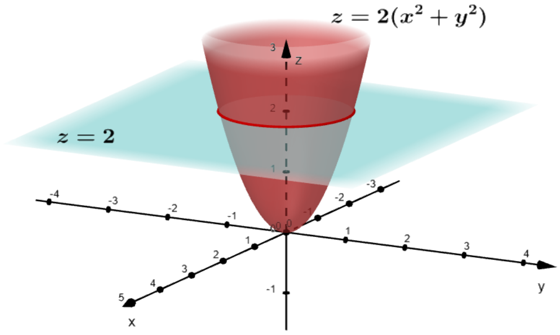


Slika 14: Dio paraboloida između dvije ravnine

7. Izračunajte tok vektorskog polja

$$\vec{a} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + 2z^2\,\vec{k}$$

kroz vanjsku stranu ruba tijela koje je omeđeno plohama $z = 2(x^2 + y^2)$ i $z = 2$.



Slika 15: Tijelo omeđeno paraboloidom i ravninom

Rub tijela je sastavljen od dvije plohe: dijela paraboloida i dijela ravnine. Zato ćemo traženi integral izračunati kao zbroj dva integrala: I_1 za tok vektorskog polja kroz dio vanjske strane paraboloida i I_2 za tok vektorskog polja kroz dio gornje strane ravnine $z = 2$.

1) Ploha (paraboloid) je zadana eksplicitno s $z = g(x, y) = 2x^2 + 2y^2$. Presijecanjem paraboloida s ravninom $z = 2$ dobivamo projekciju S_{xy} plohe S na xy ravninu: $S_{xy} \ldots\ x^2 + y^2 \leq 1$.

Normalu na plohu računamo prema izrazu

$$\overrightarrow{n_0} = \pm \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$$

stoga je

$$\overrightarrow{n_0} = \pm \frac{-4x\vec{i} - 4y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + 16x^2 + 16y^2}}.$$

S obzirom na to da normala s osi z zatvara tupi kut biramo predznak minus.
Element površine plohe je

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{1 + 16x^2 + 16y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Računamo integral:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint\limits_S \vec{a} \cdot \overrightarrow{n_0}\,\mathrm{d}S \\
&= -\iint\limits_S \frac{-4x\vec{i} - 4y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{16x^2 + 16y^2 + 1}} \left(x\vec{i} + y\vec{j} + 2z^2\vec{k}\right)\mathrm{d}S \\
&= -\iint\limits_{S_{xy}} \left(\frac{-4x^2 - 4y^2 + 2z^2}{\sqrt{16x^2 + 16y^2 + 1}}\right)\sqrt{1 + 16x^2 + 16y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{S_{xy}} \left(4(x^2 + y^2) - 2(2x^2 + 2y^2)^2\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Kako je S_{xy} krug prelazimo na polarne koordinate:

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi \qquad & 0 \le r \le 1 \\
y &= r\sin\varphi \qquad & 0 \le \varphi \le 2\pi \\
J &= r
\end{aligned}$$

$$I_1 = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^1 \left(4r^2 - 8r^4\right) r\,\mathrm{d}r = 2\pi\left(r^4 - \frac{8}{6}r^6\right)\Big|_0^1 = \frac{-2\pi}{3}.$$

2) Ravnina je zadana eksplicitno s $z = g(x, y) = 2$ i orijentirana je normalom $\overrightarrow{n_0} = \vec{k}$. Projekcija na xy ravninu je ista kao u prvom slučaju, a element površine plohe je $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Ovdje je skalarni produkt $\vec{a} \cdot \overrightarrow{n_0} = 2z^2$ pa je integral I_2 jednak

$$I_2 = \iint\limits_S 2z^2\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{S_{xy}} 8\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Budući da $\iint\limits_{S_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ računa površinu ravninskog lika jednostavno vidimo da je

$$I_2 = 8 \cdot P_{kruga} = 8\pi.$$

Konačno je

$$I = I_1 + I_2 = \frac{-2\pi}{3} + 8\pi = \frac{22}{3}\pi.$$

Napomena: zadatak se može riješiti i primjenom Teorema o divergenciji (formule Gauss-Ostrogradskog).

8. Izračunajte

$$\iint\limits_S (x - z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (2y + z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

ako je S gornji dio ravnine $x - 2y - z + 2 = 0$ isječen koordinatnim ravninama.

Ploha je zadana eksplicitno s $z = g(x, y) = x - 2y + 2$. Projekcija na xy ravninu je trokut omeđen koordinatnim osima i pravcem $x - 2y + 2 = 0$.

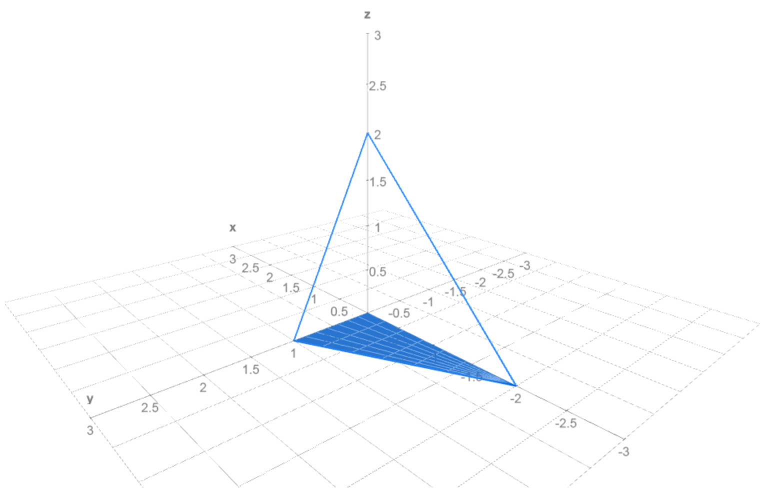
Normala na plohu glasi

$$\overrightarrow{n_0} = \pm \frac{-\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{6}}.$$

S obzirom na to da normala s osi z zatvara šiljasti kut biramo predznak plus.

Element površine plohe je

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + 4 + 1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{6}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



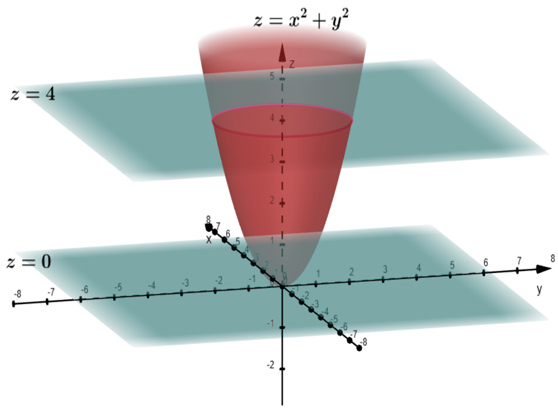
Slika 16: Dio ravnine isječen koordinatnim ravninama

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_S \vec{a}\cdot\vec{n_0}\,\mathrm{d}S = \iint_S \Big((x-z)\vec{i} + (2y+z)\vec{j}\Big)\,\frac{-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{6}}\,\mathrm{d}S \\
&= \iint_S (z-x+4y+2z)\,\frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathrm{d}S = \iint_{S_{xy}} (3(x-2y+2)-x+4y)\,\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{6}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{S_{xy}} (2x-2y+6)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{0}\mathrm{d}x\int_{0}^{1+\frac{x}{2}} (2x-2y+6)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-2}^{0}\left(2x\left(1+\frac{x}{2}\right) - \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 + 6\left(1+\frac{x}{2}\right)\right)\mathrm{d}x = 4.
\end{aligned}
$$

9. Izračunajte

$$\iint_S \sqrt{z}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

ako je S vanjska strana dijela plohe $z = x^2 + y^2$ za koji je $0 \le z \le 4$.



Slika 17: Dio paraboloida između dvije ravnine

Zadatak ćemo riješiti na dva načina: po projekcijama i kao tok vektorskog polja.

1. način

$$I = \iint_{\vec{S}} \sqrt{z}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\iint_{S_{yz}} \sqrt{z}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Prvo odredimo projekciju plohe S na yz-ravninu, zatim x izrazimo pomoću y i z.

$x = +\sqrt{z - y^2}$ i $x = -\sqrt{z - y^2}$ su dvije plohe koje čine S i koje će imati istu projekciju na yz ravninu. Stoga ćemo integral riješiti kao $I = I_1 + I_2$, gdje ćemo integral I_1 izračunati u odnosu na plohu $x = +\sqrt{z - y^2}$, a integral I_2 u odnosu na plohu $x = -\sqrt{z - y^2}$.

Projekcija na yz-ravninu za obe plohe je dana sa: $S_{yz} \ldots \begin{cases} -2 \le y \le 2, \\ y^2 \le z \le 4. \end{cases}$

Za računanje I_1 biramo predznak $+$ jer normala plohe $x = +\sqrt{z - y^2}$ zatvara šiljasti kut sa vektorom $\vec{i}$.

$$I_1 = +\iint\limits_{S_{yz}} \sqrt{z}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_{-2}^{2} \mathrm{d}y \int\limits_{y^2}^{4} \sqrt{z}\,\mathrm{d}z = \frac{2}{3}\int\limits_{-2}^{2} \left(8 - y^3\right)\mathrm{d}y = \frac{64}{3}.$$

Za računanje I_2 biramo predznak $-$ jer normala plohe $x = -\sqrt{z - y^2}$ zatvara tupi kut sa vektorom $\vec{i}$.

$$I_2 = -\iint\limits_{S_{yz}} \sqrt{z}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\int\limits_{-2}^{2} \mathrm{d}y \int\limits_{y^2}^{4} \sqrt{z}\,\mathrm{d}z = -\frac{2}{3}\int\limits_{-2}^{2} \left(8 - y^3\right)\,\mathrm{d}y = -\frac{64}{3}.$$

Konačno je

$$I = I_1 + I_2 = \frac{64}{3} - \frac{64}{3} = 0.$$

2. način

Integral I možemo izračunati kao tok vektorskog polja $\overrightarrow{w} = \sqrt{z}\,\vec{i}$.

$$I = \iint\limits_{\vec{S}} \sqrt{z}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\vec{S}} \overrightarrow{w} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint\limits_{S} \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{n_0}\,\mathrm{d}S.$$

Ploha je zadana eksplicitno s $z = g(x, y) = x^2 + y^2$ i za normalu vrijedi $\overrightarrow{n_0} = \pm\dfrac{-\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}$.

Izabrat ćemo predznak $-$ jer $\overrightarrow{n_0}$ zatvara tupi kut sa vektorom $\vec{k}$.

$$\overrightarrow{n_0} = -\frac{-2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1 + 4z}}$$

$$I = \iint\limits_{S} \sqrt{z}\,\vec{i} \cdot \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1 + 4z}}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{S} \frac{2x\sqrt{z}}{\sqrt{1 + 4z}}\,\mathrm{d}S$$

Dakle, preostaje riješiti plošni integral prve vrste.

Element površine plohe je

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Računamo integral

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_S \frac{2x\sqrt{z}}{\sqrt{1+4z}}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{S_{xy}} \frac{2x\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{S_{xy}} 2x\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Projekcija plohe S na xy ravninu je krug $S_{xy} \dots x^2 + y^2 \le 4$. Zato ćemo integral izračunati prelaskom na polarne koordinate:

$$\begin{array}{cc} x = r\cos\varphi & 0 \le r \le 2 \\ y = r\sin\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = r & \end{array}$$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^2 2r\cos\varphi\,\sqrt{r^2}\,r\,\mathrm{d}r = 2\int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int\limits_0^2 r^3\,\mathrm{d}r = 0.$$

10. Izračunajte tok vektorskog polja

$$\vec{a} = xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$$

kroz vanjski dio sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ odsječene ravninom $z = 1$, a za $z \ge 1$.

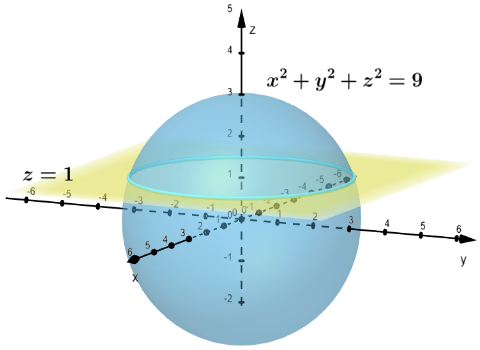
Vrijedi:

$$I = \iint\limits_{\vec{S}} \vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint\limits_S \vec{a}\cdot\overrightarrow{n_0}\,\mathrm{d}S.$$

Ploha je zadana implicitno s $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ pa $\overrightarrow{n_0}$ računamo kao

$$\overrightarrow{n_0} = \pm\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \pm\frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}}.$$

Kut kojeg zatvaraju $\overrightarrow{n_0}$ i $\vec{k}$ za $z \ge 1$ je šiljasti. Stoga biramo predznak + i imamo $\overrightarrow{n_0} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{3}$.



Slika 18: Sfera presječena ravninom

Računamo integral:

$$I = \iint\limits_S \vec{a}\cdot\vec{n_0}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_S \left(xz\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}\right)\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{3}\,\mathrm{d}S = \iint\limits_S \frac{1}{3}\left(x^2z + y^2z + z^3\right)\mathrm{d}S.$$

Preostaje riješiti plošni integral prve vrste. Odredimo projekciju plohe S na xy ravninu:

$$\begin{array}{c} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z = 1 \\ \hline x^2 + y^2 = 8. \end{array}$$

Nadalje, ploha je zadana implicitno pa $\mathrm{d}S$ računamo kao

$$\mathrm{d}S = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{4(x^2 + y^2 + z^2)}}{|2z|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Vrijedi

$$z^2 = 9 - x^2 - y^2$$
$$z = \pm\sqrt{9 - x^2 - y^2},$$

a biramo $z = +\sqrt{9 - x^2 - y^2}$ jer je ploha S dio gornje polusfere. Iz čega slijedi

$$\mathrm{d}S = \frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I = \iint\limits_S \frac{1}{3}\left(x^2z + y^2z + z^3\right) \mathrm{d}S$$
$$= \iint\limits_S \frac{1}{3}\left(x^2\sqrt{9-x^2-y^2} + y^2\sqrt{9-x^2-y^2} + \left(\sqrt{9-x^2-y^2}\right)^3\right) \frac{3}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Kako je projekcija plohe S na xy ravninu krug $S_{xy} \ldots x^2 + y^2 \leq 8$ koristit ćemo polarne koordinate za računanje integrala I:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi & \quad 0 &\leq r \leq 2\sqrt{2} \\ y &= r\sin\varphi & \quad 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \\ J &= r \end{aligned}$$

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \left(\left(r^2\cos^2\varphi\right)\sqrt{9-r^2} + (r^2\sin^2\varphi)\sqrt{9-r^2} + \left(\sqrt{9-r^2}\right)^3\right) \frac{r}{\sqrt{9-r^2}} \,\mathrm{d}r$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{2\sqrt{2}} \left(r^3 + r\left(9-r^2\right)\right) \mathrm{d}r = 72\pi.$$

11. Primjenom formule Gauss-Ostrogradskog nađite tok vektorskog polja

$$\vec{a} = x\,\vec{i} + 2y^2\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k}$$

po plohi koja omeđuje područje $V = \{(x, y, z) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

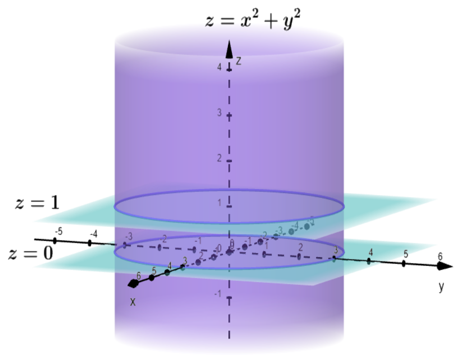
Vrijedi:

$$I = \iint\limits_{\vec{S}} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{a}\,\mathrm{d}V,$$

$$\operatorname{div}\vec{a} = 1 + 4y + 6z.$$

Ploha S je dio kružnog cilindra, stoga ćemo za računanje integrala koristiti cilindrične koordinate:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi & \quad 0 &\leq r \leq 3 \\ y &= r\sin\varphi & \quad 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \\ z &= z & \quad 0 &\leq z \leq 1 \\ J &= r \end{aligned}$$



Slika 19: Dio cilindra između dvije ravnine

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{a}\,\mathrm{d}V = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{3} \mathrm{d}r \int\limits_0^{1} (1 + 4r\sin\varphi + 6z)\, r\,\mathrm{d}z \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{3} \left(r + 4r^2\sin\varphi + 3r\right)\,\mathrm{d}r = \int\limits_0^{2\pi} (18 + 36\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 36\pi.
\end{aligned}
$$

12. Izračunajte

$$\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

ako je S vanjska strana ruba tijela V zadanog nejednakostima $z \le 2-\sqrt{x^2+y^2}$ i $z \ge x^2+y^2$.

Vrijedi

$$I = \iint\limits_{\vec{S}} \vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{a}\,\mathrm{d}V,$$

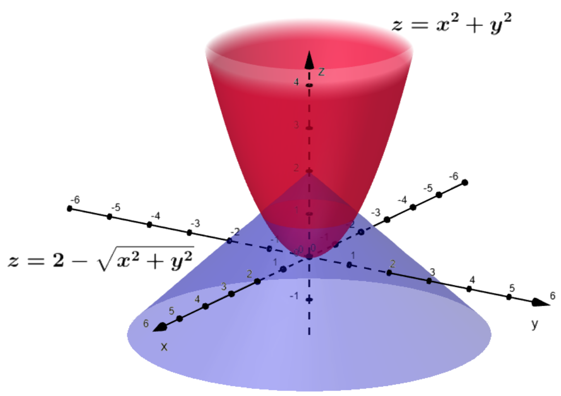
pri čemu je

$$\vec{a} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \text{ i } \operatorname{div}\vec{a} = 3.$$

Sada je

$$I = \iiint\limits_V 3\,\mathrm{d}V = 3\iiint\limits_V \mathrm{d}V.$$

Ovaj trostruki integral računa tri puta volumen tijela V i za njegovo računanje koristimo cilindrične koordinate.



Slika 20: Tijelo sastavljeno od paraboloida i stošca

$$\begin{array}{cc} x = r\cos\varphi & 0 \le r \le 1 \\ y = r\sin\varphi & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = z & x^2+y^2 \le z \le 2-\sqrt{x^2+y^2}, \text{ tj.} \\ J = r & r^2 \le z \le 2-r \end{array}$$

$$I = 3\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \mathrm{d}r \int_{r^2}^{2-r} r\,\mathrm{d}z = 3\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 r\,(2-r-r^2)\,\mathrm{d}r = \frac{5}{4}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \frac{5\pi}{2}.$$

13. Uz pomoć Stokesove formule izračunajte

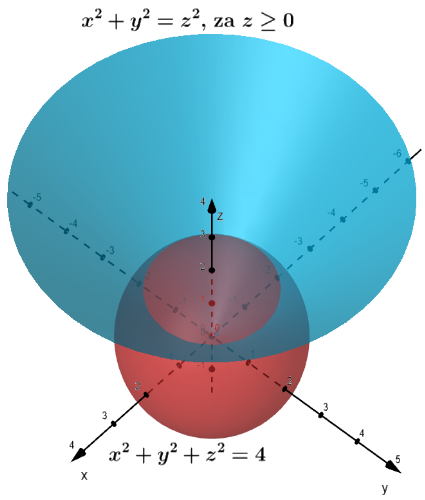
$$I = \int_{\vec{K}} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

vektorskog polja $\vec{a} = y\,\vec{i} - x\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ po zatvorenoj krivulji K zadanoj kao sjecište ploha $x^2+y^2+z^2 = 4$ i $x^2+y^2 = z^2$, za $z \ge 0$.

Krivulju K dobivamo iz $2z^2 = 4$, tj. $z = \sqrt{2}$ i $x^2+y^2 = 2$.

Stokesova formula glasi: $\oint_{\vec{K}} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_{\vec{S}} \operatorname{rot}\vec{a}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$. Dakle, računamo tok vektorskog polja $\operatorname{rot}\vec{a}$ kroz plohu S, gdje za plohu S možemo uzeti dio ravnine $z = \sqrt{2}$ za koji je $x^2+y^2 \le 2$. Uočimo, za plohu S možemo uzeti sferu ili stožac, ali tada bi račun bio nešto složeniji.

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & z \end{vmatrix} = -2\,\vec{k}.$$



Slika 21: Presjek sfere i stošca

Sada je

$$I = \iint_{\vec{S}} \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint_{S} \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{n_0}\, dS$$

pri čemu je

$$\vec{n_0} = \pm \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial g}{\partial x}\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}} = \pm \vec{k},$$

jer je ploha S zadana eksplicitno s $z = g(x, y) = \sqrt{2}$.

Kada gledamo s vrha vektora normale (na plohu u nekoj točki) prema krivulji, orijentaciju plohe, odnosno predznak za normalu moramo izabrati tako da kretanje po krivulji bude u pozitivnom smjeru. Stoga biramo predznak + i tada je

$$I = \iint_{S} \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \vec{n_0}\, dS = \iint_{S} (-2)\, dS.$$

Nadalje,

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, dxdy = dxdy.$$

Projekcija plohe S na xy ravninu je dana s $x^2 + y^2 \leq 2$.

$$I = \iint_{\vec{S}} (-2)\, dS = -2 \iint_{\vec{S}_{xy}} dxdy.$$

Provedimo još prelazak na polarne koordinate:

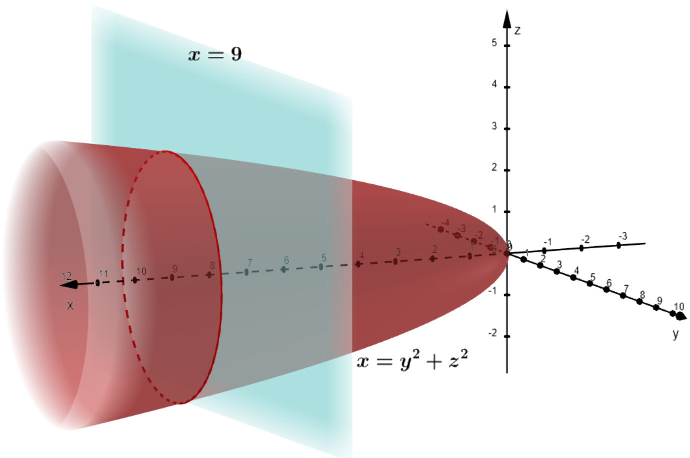
$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi & 0 &\le r \le \sqrt{2} \\ y &= r\sin\varphi & 0 &\le \varphi \le 2\pi \\ J &= r \end{aligned}$$

$$I = -2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r\,\mathrm{d}r = -4\pi.$$

14. Izračunajte cirkulaciju vektorskog polja

$$\vec{a} = zy^2\,\vec{i} + xz^2\,\vec{j} + yx^2\,\vec{k}$$

duž krivulje $K \ldots \begin{cases} x = y^2 + z^2 \\ x = 9 \end{cases}$.



Slika 22: Presjek paraboloida i ravnine

Koristit ćemo Stokesovu formulu $\oint\limits_{\vec{K}} \vec{a}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint\limits_{\vec{S}} \operatorname{rot}\vec{a}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$. Dakle, trebamo odrediti tok vektorskog polja $\operatorname{rot}\vec{a}$ kroz plohu

$$S \ldots \begin{cases} x = y^2 + z^2 \\ 0 \le x \le 9 \end{cases}$$

kojoj je K rub.

Računamo

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ zy^2 & xz^2 & yx^2 \end{vmatrix} = (x^2 - 2xz)\,\vec{i} + (y^2 - 2xy)\,\vec{j} + (z^2 - 2yz)\,\vec{k}$$

$$I = \iint\limits_{\vec{S}} \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint\limits_{S} \operatorname{rot} \vec{a} \cdot \overrightarrow{n_0} \, \mathrm{d}S$$

pri čemu je

$$\overrightarrow{n_0} = \pm \frac{\vec{i} - \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial g}{\partial z} \vec{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2}} = \pm \frac{\vec{i} - 2y\vec{j} - 2z\vec{k}}{\sqrt{1 + (2y)^2 + (2z)^2}},$$

jer je ploha S zadana eksplicitno s $x = g(y, z) = y^2 + z^2$.

Kada gledamo s vrha vektora normale (na plohu u nekoj točki) prema krivulji, orijentaciju plohe, odnosno predznak za normalu moramo izabrati tako da kretanje po krivulji bude u pozitivnom smjeru. Stoga nam treba unutrašnja orijentacija plohe te biramo predznak $+$:

$$\overrightarrow{n_0} = + \frac{\vec{i} - 2y\vec{j} - 2z\vec{k}}{\sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2}},$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} \cdot \overrightarrow{n_0} = \frac{x^2 - 2xz - 2y^3 + 4xy^2 - 2z^3 + 4z^2 y}{\sqrt{1 + 4x}}.$$

Sada je

$$I = \iint\limits_{S} \frac{x^2 - 2xz - 2y^3 + 4xy^2 - 2z^3 + 4z^2 y}{\sqrt{1 + 4x}} \, \mathrm{d}S.$$

Još trebamo izračunati plošni integral 1. vrste. Projekcija plohe S na yz ravninu je dana sa $S_{yz} \ldots y^2 + z^2 \leq 9$. Element površine plohe je

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2} \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2} \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

čijim uvrštavanjem u gornji integral dobivamo:

$$\iint\limits_{S_{yz}} \frac{y^4 + 2y^2z^2 + z^4 - 2y^2z - 2z^3 - 2y^3 + 4y^4 + 4z^2y^2 - 2z^3 + 4z^2y}{\sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2}} \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2} \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iint\limits_{S_{yz}} \left(y^4 + 2y^2z^2 + z^4 - 2y^2z - 2z^3 - 2y^3 + 4y^4 + 4z^2y^2 - 2z^3 + 4z^2y\right) \, \mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Prijeći ćemo na polarne koordinate:

$$\begin{aligned} y &= r\cos\varphi \qquad & 0 \leq r \leq 3 \\ z &= r\sin\varphi \qquad & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ J &= r & \end{aligned}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^3 (5r^4 \cos^4 \varphi + r^4 \sin^4 \varphi - 2r^3 \cos^3 \varphi - 4r^3 \sin^3 \varphi$$
$$+ 6r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - 2r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi + 4r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi) r \, \mathrm{d}r$$
$$= \frac{5 \cdot 3^6}{6} \frac{3\pi}{4} + \frac{3^6}{6} \frac{3\pi}{4} + 3^6 \frac{\pi}{4} = 3^6 \pi = 729\pi.$$

Napomena:

Ako za plohu S umjesto paraboloida izaberemo dio ravnine $x = 9$, onda je račun bitno jednostavniji jer je $\overrightarrow{n_0} = \vec{i}$ i $\operatorname{rot} \vec{a} \cdot \overrightarrow{n_0} = x^2 - 2xz$. Integral je tada

$$I = \iint_S \left(x^2 - 2xz\right) \, \mathrm{d}S = \iint_S \left(9^2 - 18z\right) \, \mathrm{d}S.$$

Projekcija je ista kao i u prehodnom pa je

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^3 (81 - 18r \sin \varphi) \, r \, \mathrm{d}r = 729\pi.$$

5 FOURIEROV RED

5.1 Osnovni pojmovi

Kažemo da je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **periodična funkcija** ako postoji $T > 0$ takav da za svaki x iz domene funkcije f vrijedi $f(x) = f(x+T)$. Broj T nazivamo periodom od f. Najmanji period (ako postoji) nazivamo osnovnim (ili temeljnim) periodom.

Trigonometrijski Fourierov red zadane periodične funkcije f s periodom 2π je red

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right),$$

kojemu su koeficijenti

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{d}x, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, \mathrm{d}x, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Koeficijente $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ nazivamo **Fourierovim koeficijentima** funkcije f. Pišemo $f(x) \sim S(x)$.

Trigonometrijski Fourierov red zadane periodične funkcije f s periodom $T = b - a$ je

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi x}{T} \right),$$

kojemu su koeficijenti

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{a}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x, \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{a}^{b} f(x) \cos \frac{2n\pi x}{T}\, \mathrm{d}x, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{a}^{b} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T}\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Kažemo da funkcija f zadovoljava **Dirichletove uvjete** na intervalu $[a, b]$ ako vrijedi:
1) f je po dijelovima neprekidna i njezini su prekidi prve vrste,
2) f je monotona ili ima najviše konačan broj strogih ekstrema.

Teorem (konvergencija po točkama) Neka je f po dijelovima glatka periodična funkcija s periodom 2π koja zadovoljava Dirichletove uvjete. Tada njezin Fourierov red

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

konvergira u svakoj točki $x \in [-\pi, \pi]$ i za sumu $S(x)$ reda vrijedi:
(i) $S(x) = f(x)$, ako je f neprekidna u točki x,
(ii) $S(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$, ako je x točka prekida za f.

Ako je funkcija f definirana i parna na simetričnom intervalu $[-L, L]$, onda je $b_n = 0$ za svaki $n \geq 1$, tj. njezin Fourierov red sadrži samo kosinus članove i glasi

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Pri tome za a_n vrijedi

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x,\ n \geq 0.$$

Kažemo da smo funkciju f razvili u **Fourierov red po kosinus funkcijama**.

Ako je funkcija f definirana i neparna na simetričnom intervalu $[-L, L]$, onda je $a_n = 0$ za svaki $n \geq 0$, tj. njezin Fourierov red sadrži samo sinus članove i glasi

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Pri tome za b_n vrijedi

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x,\ n \geq 1.$$

Kažemo da smo funkciju f razvili u **Fourierov red po sinus funkcijama**.

Za Fourierove koeficijente vrijedi **Parsevalova jednakost**

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{2}{T}\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

5.2 Zadaci

1. Razvijte u Fourierov red funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle \frac{-\pi}{2}, 0\rangle \\ \cos x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}\rangle . \end{cases}$$

2. Razvijte u Fourierov red po sinus funkcijama (neparno proširenje) funkciju $f(x) = x$ na intervalu $\langle 0, 2\rangle$.

3. Razvijte u Fourierov red po kosinus funkcijama (parno proširenje) funkciju $f(x) = \sin x$ na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.

4. Razvijte u Fourierov red funkciju

$$f(x) = 2 - |x|$$

na intervalu $[-1, 1]$ te pomoću dobivenog razvoja izračunajte sumu reda $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

5. Razvijte u Fourierov red funkciju

$$f(x) = 2\,\mathrm{sgn}(e^x - 1), \quad x \in [-3, 3]\,,$$

a potom, koristeći taj razvoj izračunajte $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

6. Razvijte u Fourierov red po kosinus funkcijama funkciju $f(x) = \mathrm{sgn}(|x| - 1)$, $x \in [0, 2]$. Pomoću tog razvoja i Parsevalove jednakosti izračunajte sumu reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

7. Parno proširenje funkcije $f(x) = 1 - x$ zadane na intervalu $\langle 0, 1]$ razvijte u Fourierov red. Pomoću dobivenog razvoja izračunajte sumu reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.

8. Funkcija $f(x) = x + \pi$ definirana je na intervalu $\langle -\pi, 0\rangle$. Razvijte funkciju f u Fourierov red po sinus funkcijama te izračunajte sumu reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Rješenja:

1. Razvijte u Fourierov red funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle \frac{-\pi}{2}, 0\rangle \\ \cos x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}\rangle . \end{cases}$$

Funkcija f nije ni parna ni neparna. Računamo koeficijente $a_0,\ a_k,\ b_k$:

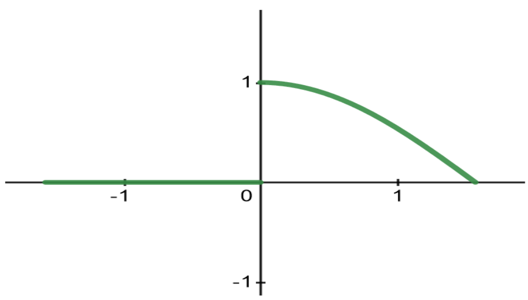
$$a_0 = \frac{2}{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 0\,\mathrm{d}x}_{0} + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{2}{\pi},$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cdot\cos\frac{2k\pi x}{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 0\cdot\cos(2kx)\,\mathrm{d}x}_{0} + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cdot\cos(2kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(\cos(x-2kx)+\cos(x+2kx)\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2k-1)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2k+1)x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2k-1}\sin(k\pi-\frac{\pi}{2}) + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2k+1}\sin(k\pi+\frac{\pi}{2}) \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2k-1}\left(\sin k\pi\cdot\cos\frac{\pi}{2} - \cos k\pi\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2k+1}\left(\sin k\pi\cdot\cos\frac{\pi}{2} + \cos k\pi\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2k-1}(-\cos k\pi) + \frac{1}{2k+1}(\cos k\pi)\right] \\
&= \frac{\cos k\pi}{\pi}\left(-\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1}\right) \\
&= \frac{(-1)^k}{\pi}\cdot\frac{-2k-1+2k-1}{4k^2-1} \\
&= \frac{-2(-1)^k}{\pi(4k^2-1)} \\
&= \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cdot \sin\frac{2k\pi x}{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 0\cdot \sin(2kx)\,\mathrm{d}x}_{0} + \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cdot \sin(2kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(\sin(2kx-x)+\sin(2kx+x)\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k-1)x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k+1)x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{-1}{2k-1}\cos(2k-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2k+1}\cos(2k+1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{-1}{2k-1}\left[\cos(2k-1)\frac{\pi}{2}-1\right] - \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2k+1}\left[\cos(2k+1)\frac{\pi}{2}-1\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k+1}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2k+1+2k-1}{4k^2-1} \\
&= \frac{4k}{\pi(4k^2-1)}.
\end{aligned}
$$

Fourierov red funkcije f glasi:

$$
f(x) = \frac{1}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}\cos(2kx) + \frac{4k}{\pi(4k^2-1)}\sin(2kx)\right).
$$

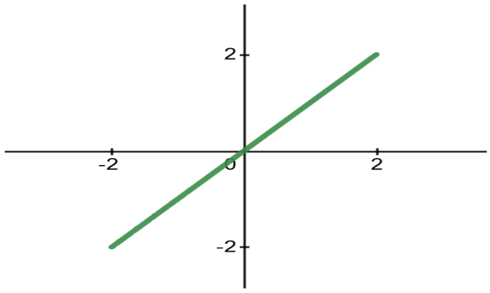


Slika 23: Graf funkcije (zadatak 1.)

2. Razvijte u Fourierov red po sinus funkcijama (neparno proširenje) funkciju $f(x) = x$ na intervalu $\langle 0, 2\rangle$.

Potrebno je definirati proširenje na intervalu $\langle -2, 0]$, a kako želimo dobiti neparnu funkciju koristimo $f(x) = -f(-x)$. Što je u ovom slučaju $f(x) = -f(-x) = -(-x) = x$ pa je proširenje funkcije f dano s

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle 0, 2\rangle \\ x, & x \in \langle -2, 0\rangle \\ 0, & x = 0\,. \end{cases}$$



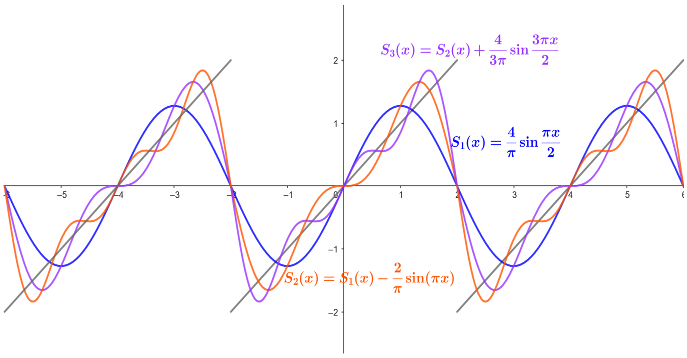
Slika 24: Graf neparnog proširenja funkcije (zadatak 2.)

Proširenje je neparno iz čega slijedi $a_0 = 0$, $a_k = 0$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, a koeficijente b_k računamo:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{2+2} \int_{-2}^{2} \underbrace{f(x) \cdot \sin \frac{2k\pi x}{2+2}}_{\text{parna}} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_{0}^{2} x \cdot \sin \frac{k\pi x}{2} \,\mathrm{d}x \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} u = x & \mathrm{d}v = \sin \frac{k\pi x}{2} \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = \frac{-2}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{2} \end{array} \right\} \\
&= \frac{-2x}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^2 + \frac{2}{k\pi} \int_0^2 \cos \frac{k\pi x}{2} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-4}{k\pi} \cos k\pi + \frac{2 \cdot 0}{k\pi} \cos 0 + \frac{4}{k^2\pi^2} \underbrace{\sin \frac{k\pi x}{2} \Big|_0^2}_{0} \\
&= \frac{-4}{k\pi} \cdot (-1)^k \\
&= \frac{4}{k\pi} \cdot (-1)^{k+1}.
\end{aligned}$$

Fourierov red funkcije f glasi:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\pi} \cdot (-1)^{k+1} \sin \frac{k\pi x}{2}.$$

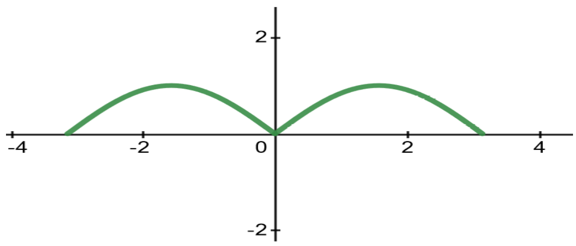


Slika 25: Prve tri aproksimacije funkcije preko njezinog Fourierovog reda (zadatak 2.)

3. Razvijte u Fourierov red po kosinus funkcijama (parno proširenje) funkciju $f(x) = \sin x$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Potrebno je definirati proširenje na intervalu $\langle -\pi, 0]$, a kako želimo dobiti parnu funkciju koristimo $f(x) = f(-x)$. Što je u ovom slučaju $f(x) = f(-x) = \sin(-x) = -\sin x$ pa je proširenje funkcije f dano s

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in \langle 0, \pi \rangle \\ -\sin x, & x \in \langle -\pi, 0 \rangle \\ 0, & x = 0\,. \end{cases}$$



Slika 26: Graf parnog proširenja funkcije (zadatak 3.)

Proširenje je parno iz čega slijedi $b_k = 0$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, a koeficijente a_0 i a_k računamo:

$$a_0 = \frac{2}{\pi + \pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{parna}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_{0}^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{-2}{\pi} \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{-2}{\pi} (\cos \pi - \cos 0) = \frac{4}{\pi},$$

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi+\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cdot\cos\frac{2k\pi x}{\pi+\pi}}_{\text{parna}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot 2\int_{0}^{\pi} \sin x\cdot\cos kx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}\left(\sin(x+kx)+\sin(x-kx)\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(k+1)x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(k-1)x\,\mathrm{d}x \\
&\overset{k\neq 1}{=} \frac{1}{\pi}\cdot\frac{-1}{k+1}\cos(k+1)x\,\Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{k-1}\cos(k-1)x\,\Big|_{0}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{-1}{k+1}\left[\cos(k+1)\pi-1\right] + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{k-1}\left[\cos(k-1)\pi-1\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{k+1}\left(\cos k\pi\cdot\cos\pi-\sin k\pi\cdot\sin\pi-1\right)+\frac{1}{k-1}\left(\cos k\pi\cdot\cos\pi+\sin k\pi\cdot\sin\pi-1\right)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{k+1}\left(-\cos k\pi-1\right)+\frac{1}{k-1}\left(-\cos k\pi-1\right)\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k+1}\left(\cos k\pi+1\right)-\frac{1}{k-1}\left(\cos k\pi+1\right)\right] \\
&= \frac{\cos k\pi+1}{\pi}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k-1}\right) \\
&= \frac{(-1)^k+1}{\pi}\cdot\frac{k-1-k-1}{k^2-1} \\
&= \frac{-2\left[(-1)^k+1\right]}{\pi(k^2-1)} \\
&= \begin{cases} \frac{-4}{\pi(4n^2-1)}, & k=2n,\ n\in\mathbb{N} \\ 0, & k=2n-1,\ n\in\mathbb{N}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Pri računanju koeficijenata a_k javlja se razlomak nazivnika $k-1$. Stoga su gornjim računom obuhvaćeni koeficijenti za koje je $k\neq 1$ pa je koeficijent a_1 potrebno izračunati zasebno:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{\pi+\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cdot\cos\frac{2\cdot 1\cdot\pi\cdot x}{\pi+\pi}}_{\text{parna}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\cdot 2\int_{0}^{\pi}\sin x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\cos 2x\,\Big|_{0}^{\pi} = \frac{-1}{2\pi}(\cos 2\pi-\cos 0) = 0.
\end{aligned}
$$

Fourierov red funkcije f glasi:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{-4}{\pi(4n^2-1)}}_{a_{2n}} \cos 2nx.$$

4. Razvijte u Fourierov red funkciju

$$f(x) = 2 - |x|$$

na intervalu $[-1, 1]$ te pomoću dobivenog razvoja izračunajte sumu reda $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Funkcija f je parna iz čega slijedi $b_k = 0$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, a koeficijente a_0 i a_k računamo:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{2} \int_{-1}^{1} \underbrace{f(x)}_{\text{parna}} \,\mathrm{d}x = 1 \cdot 2 \int_{0}^{1} (2-x)\,\mathrm{d}x = 3, \\
a_k &= \frac{2}{2} \cdot 2 \int_{0}^{1} (2-x) \cos \frac{(2k\pi x)}{2} \,\mathrm{d}x \\
&= 2 \int_{0}^{1} (2-x) \cos k\pi x \,\mathrm{d}x = \begin{Bmatrix} u = 2-x & \mathrm{d}v = \cos k\pi x \,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x & v = \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x \end{Bmatrix} \\
&= 2 \frac{2-x}{k\pi} \sin(k\pi x) \Big|_0^1 + \frac{2}{k\pi} \int_0^1 \sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-2}{k^2\pi^2} \cos(k\pi x) \Big|_0^1 \\
&= \frac{-2}{k^2\pi^2} \cdot \left[(-1)^k - 1\right] \\
&= \begin{cases} 0, & k = 2n,\ n \in \mathbb{N} \\ \frac{4}{\pi^2(2n-1)^2}, & k = 2n-1,\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Fourierov red funkcije f glasi:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x = \frac{3}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)\pi x.$$

Primijetimo, u gornjem izrazu smo pomakli indeks sume. Nadalje, kako bismo izračunali traženu sumu zadanog reda moramo u dobiveni Fourierov razvoj funkcije f uvrstiti točku iz intervala $[-1, 1]$ takvu da red dobiven iz razvoja i zadani red budu jednaki do na konstantu.

Također je potrebno odrediti i funkcijsku vrijednost od f u toj točki. Odabirom $x = 0$ dobivamo $f(0) = 2$ i

$$f(0) = \frac{3}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

odnosno

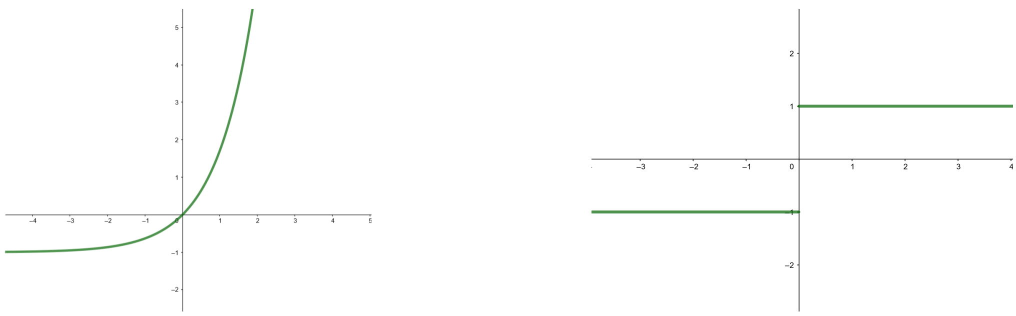
$$2 = \frac{3}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

5. Razvijte u Fourierov red funkciju

$$f(x) = 2\,\mathrm{sgn}(e^x - 1), \quad x \in [-3, 3],$$

a potom, koristeći taj razvoj izračunajte $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.



(a) Graf funkcije $g(x) = e^x - 1$

(b) Graf funkcije $h(x) = \mathrm{sgn}(e^x - 1)$

Slika 27: Grafovi pomoćnih funkcija (zadatak 5.)

Funkcija *predznak* ili *signum* definirana je na sljedeći način:

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Funkcija f je neparna iz čega slijedi da je $a_k = 0$, za svaki $k \in \mathbb{N}_0$, a koeficijente b_k

računamo:

$$
\begin{aligned}
b_k &= 2 \cdot \frac{2}{6} \int_0^3 2 \cdot \sin \frac{2k\pi x}{6}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{4}{3} \int_0^3 \sin \frac{k\pi x}{3}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-4}{3} \cdot \frac{3}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{3} \Big|_0^3 \\
&= \frac{-4}{k\pi} (\cos k\pi - \cos 0) \\
&= \frac{-4}{k\pi} \left[(-1)^k - 1\right] \\
&= \begin{cases} \frac{8}{\pi(2n-1)}, & k = 2n-1,\ n \in \mathbb{N} \\ 0, & k = 2n,\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Fourierov red funkcije f glasi:

$$
f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{3} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi}{3} x.
$$

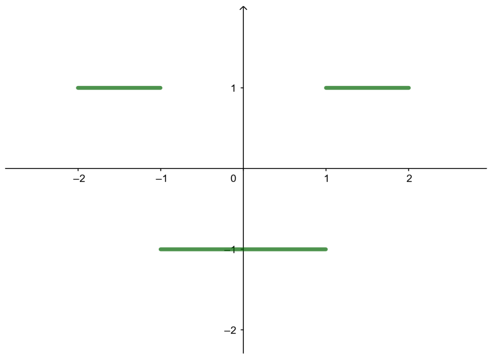
Specijalno, za $x = \frac{3}{2}$ dobivamo

$$
f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},
$$

odnosno

$$
\begin{aligned}
2 &= \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} &= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

6. Razvijte u Fourierov red po kosinus funkcijama funkciju $f(x) = \operatorname{sgn}(|x| - 1)$, $x \in [0, 2]$. Pomoću tog razvoja i Parsevalove jednakosti izračunajte sumu reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.



Slika 28: Graf parnog proširenja funkcije (zadatak 6.)

Za neparno proširenje funkcije f je $b_k = 0$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, pa računamo:

$$a_0 = \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} \underbrace{f(x)}_{\text{parna}} \,\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{2}{4}\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (-1)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 1\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\begin{aligned}
a_k &= 2\cdot\frac{2}{4}\int_0^2 f(x)\cos\frac{2k\pi x}{4}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(-\cos\frac{k\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_1^2 \cos\frac{k\pi x}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{-2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_0^1 + \frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big|_1^2 = \frac{-4}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2} \\
&= \begin{cases} 0, & k = 2n,\ n\in\mathbb{N} \\ \frac{-4\,(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi}, & k = 2n-1,\ n\in\mathbb{N}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Fourierov red funkcije f glasi:

$$f(x) = \frac{-4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

Iz Parsevalove jednakosti slijedi:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{4}\int_{-2}^{2}(f(x))^2\mathrm{d}x &= \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}, \\
2 &= \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}, \\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} &= \frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned}$$

7. Parno proširenje funkcije $f(x) = 1 - x$ zadane na intervalu $\langle 0, 1]$ razvijte u Fourierov red. Pomoću dobivenog razvoja izračunajte sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.

Za parno proširenje funkcije f je $b_k = 0$, za svaki $k \in \mathbb{N}$, pa računamo:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{1-(-1)} \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \int_{0}^{1} (1-x)\,\mathrm{d}x = 1, \\
a_k &= \frac{2}{1-(-1)} \int_{-1}^{1} f(x) \cos \frac{2k\pi x}{1-(-1)}\,\mathrm{d}x \\
&= 2 \int_{0}^{1} (1-x) \cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} u = 1-x & \mathrm{d}v = \cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x & v = \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi x) \end{array} \right\} \\
&= 2 \left[\frac{1-x}{k\pi} \sin(k\pi x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{-1}{k\pi} \sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x \right] \\
&= 2 \left[\frac{1-1}{k\pi} \sin(k\pi) - \frac{1-0}{k\pi} \sin 0 + \frac{1}{k\pi} \frac{-1}{k\pi} \cos(k\pi x) \Big|_0^1 \right] \\
&= \frac{-2}{k^2\pi^2} \left(\cos(k\pi) - \cos 0 \right) \\
&= \frac{-2}{k^2\pi^2} \left[(-1)^k - 1 \right] \\
&= \begin{cases} 0, & k = 2n,\ n \in \mathbb{N} \\ \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}, & k = 2n-1,\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Fourierov red funkcije f glasi:

$$
f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{k^2\pi^2} \left((-1)^k - 1 \right) \cos(k\pi x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2} \cos\left((2n-1)\pi x \right).
$$

Kako bi izračunali sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ primijenit ćemo Parsevalovu jednakost

$$\frac{2}{1-(-1)}\int_{-1}^{1}(f(x))^2\,\mathrm{d}x = \frac{1^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\right)^2$$

$$2\int_{0}^{1}(1-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}+\frac{16}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2}+\frac{16}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

8. Funkcija $f(x) = x+\pi$ definirana je na intervalu $\langle -\pi, 0\rangle$. Razvijte funkciju f u Fourierov red po sinus funkcijama te izračunajte sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Za neparno proširenje funkcije f je $a_k = 0$, za svaki $k \in \mathbb{N}_0$, pa računamo:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi-(-\pi)}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{2k\pi x}{\pi-(-\pi)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x. \\
&= \frac{1}{\pi}2\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \left\{\begin{array}{ll} u = x+\pi & \mathrm{d}v = \sin(kx)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & v = \frac{-1}{k}\cos(kx) \end{array}\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-(x+\pi)}{k}\cos(kx)\Big|_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\frac{-1}{k}\cos(kx)\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi}{k}\cos 0 - 0 + \frac{1}{k}\frac{1}{k}\sin(kx)\Big|_{-\pi}^{0}\right] \\
&= \frac{-2}{k}.
\end{aligned}$$

Fourierov red funkcije f glasi:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2}{k}\sin(kx).$$

Kako bi izračunali sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ koristit ćemo Parsevalovu jednakost

$$\frac{2}{\pi - (-\pi)} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-2}{k}\right)^2$$

$$\frac{1}{\pi} 2 \int_{-\pi}^{0} (x+\pi)^2 \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$$

$$\frac{2\pi^2}{3} = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

6 FOURIEROV INTEGRAL

6.1 Osnovni pojmovi

Teorem Ako je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ po dijelovima glatka na svakom konačnom intervalu i apsolutno integrabilna, onda postoji njezin Fourierov integral i vrijedi

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi =$$

$$\begin{cases} f(x), & \text{ako je } f \text{ neprekinuta u } x, \\ \frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right], & \text{ako je } f \text{ prekinuta u } x. \end{cases}$$

Neka funkcija f zadovoljava uvjete prethodnog Teorema i neka je $\widetilde{f}$ funkcija definirana sa

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ako je } f \text{ neprekinuta u } x, \\ \frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right], & \text{ako je } f \text{ prekinuta u } x. \end{cases}$$

Tada za svaki x vrijedi

$$\widetilde{f}(x) = \int_0^\infty \left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]\mathrm{d}\lambda.$$

Ovaj integral nazivamo **Fourierovim integralom** funkcije f.

Funkcije

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi \quad \text{i} \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\sin\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi$$

nazivamo **kosinusnim** i **sinusnim spektrom**, redom, funkcije f.

Parna funkcija nema sinusnog spektra, tj. $B(\lambda) = 0$ i

$$f(x) = \int_0^\infty A(\lambda)\cos\lambda x\,\mathrm{d}\lambda, \quad A(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi.$$

Neparna funkcija nema kosinusnog spektra, tj. $A(\lambda) = 0$ i

$$f(x) = \int_0^\infty B(\lambda)\sin\lambda x\,\mathrm{d}\lambda, \quad B(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\sin\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi.$$

Funkciju $\widehat{f}$ definiranu sa

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\lambda\xi} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

nazivamo **Fourierovim transformatom** funkcije f, a obrnuta veza je dana sa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\lambda x} \widehat{f}(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda.$$

Preslikavanje koje funkciji f pridružuje funkciju $\widehat{f}$ nazivamo **Fourierovom transformacijom**, a inverzno preslikavanje **inverznom Fourierovom transformacijom**.

6.2 Zadaci

1. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in \langle -2, 2\rangle \\ 0, & x \notin \langle -2, 2\rangle. \end{cases}$$

2. Prikažite Fourierovim integralom neparno proširenje funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in \langle 0, 2\rangle \\ 0, & x \in [2, \infty\rangle \end{cases}$$

te odredite

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{\sin^2 2t}{t^2} - \frac{\sin 2t}{t} - \frac{\sin 4t}{2t} \right) \mathrm{d}t.$$

3. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{9} - x^2\right), & x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

te odredite

$$I = \int_0^\infty \left(-\frac{\sin t}{t} + \frac{2 \sin \frac{t}{3}}{t} \right) \mathrm{d}t.$$

4. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cos \frac{x}{2}, & x \in [-\pi, \pi] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

te odredite

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos \pi t}{1 - 4t^2} \, \mathrm{d}t.$$

5. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

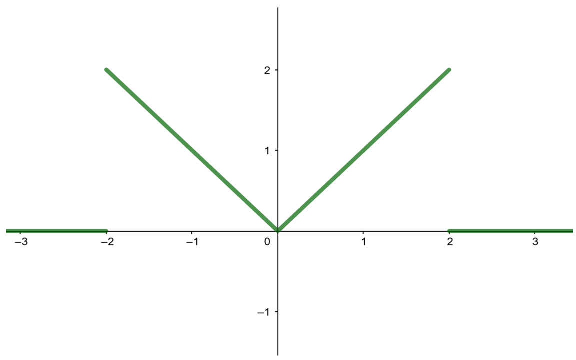
te odredite

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} (4 \cos t - 1) \, \mathrm{d}t.$$

Rješenja:

1. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in \langle -2, 2\rangle \\ 0, & x \notin \langle -2, 2\rangle. \end{cases}$$



Slika 29: Graf funkcije (zadatak 1.)

Funkcija f je parna iz čega slijedi da je $B(\omega) = 0$. Potrebno je odrediti kosinusni spektar $A(\omega)$:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos \omega x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^2 x \cdot \cos \omega x \, \mathrm{d}x + \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_2^\infty 0 \cdot \cos \omega x \, \mathrm{d}x}_{0} \\ &= \left\{ \begin{matrix} u = x & dv = \cos \omega x \, \mathrm{d}x \\ du = dx & v = \frac{1}{\omega} \sin \omega x \end{matrix} \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{\omega} \sin \omega x \Big|_0^2 - \frac{1}{\omega} \int_0^2 \sin \omega x \, \mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{2}{\omega} \sin 2\omega + \frac{1}{\omega^2} \cos \omega x \Big|_0^2 \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{2}{\omega} \sin 2\omega + \frac{1}{\omega^2} \cos 2\omega - \frac{1}{\omega^2} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\omega \sin 2\omega + \cos 2\omega - 1}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Fourierov integral funkcije f glasi:

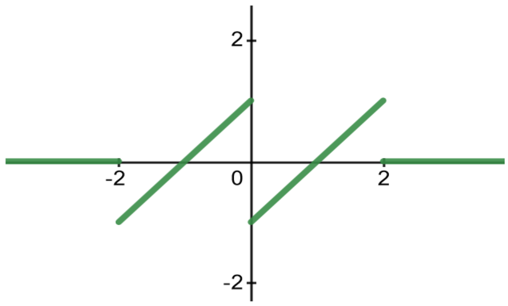
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{2\omega \sin 2\omega + \cos 2\omega - 1}{\omega^2} \cos \omega x \, \mathrm{d}\omega.$$

2. Prikažite Fourierovim integralom neparno proširenje funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \in \langle 0, 2\rangle \\ 0, & x \in [2, \infty\rangle, \end{cases}$$

te odredite

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{\sin^2 2t}{t^2} - \frac{\sin 2t}{t} - \frac{\sin 4t}{2t} \right) \mathrm{d}t.$$



Slika 30: Graf neparnog proširenja funkcije (zadatak 2.)

Kako bi dobili neparno proširenje funkcije f koristimo $f(x) = -f(-x)$. U ovom slučaju je $f(x) = -f(-x) = -(-x-1) = x+1$ pa je proširenje funkcije f dano s

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \in \langle 0, 2\rangle \\ x+1, & x \in \langle -2, 0\rangle \\ 0, & x \in \langle -\infty, -2] \cup [2, \infty\rangle. \end{cases}$$

Proširenje je neparno iz čega slijedi da je $A(\omega) = 0$, a sinusni spektar $B(\omega)$ računamo:

$$\begin{aligned}
B(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin \omega x \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^2 (x-1) \cdot \sin \omega x \, \mathrm{d}x + \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_2^\infty 0 \cdot \sin \omega x \, \mathrm{d}x}_{0} \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} u = x-1 & dv = \sin \omega x \, \mathrm{d}x \\ du = dx & v = -\frac{1}{\omega} \cos \omega x \end{array} \right\} \\
&= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x-1}{\omega} \cos \omega x \Big|_0^2 + \frac{1}{\omega} \int_0^2 \cos \omega x \, \mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{\omega} \cos 2\omega - \frac{1}{\omega} \cos 0 + \frac{1}{\omega^2} \sin \omega x \Big|_0^2 \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{\omega} \cos 2\omega - \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} \sin 2\omega \right).
\end{aligned}$$

Fourierov integral funkcije f glasi:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\left(-\frac{\cos 2\omega}{\omega}-\frac{1}{\omega}+\frac{\sin 2\omega}{\omega^2}\right)\sin\omega x\,\mathrm{d}\omega.$$

Sada treba odrediti integral I. Uočimo da za $x=2$ dobivamo traženi integral

$$\begin{aligned}
f(2)&=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\left(-\frac{\cos 2\omega}{\omega}-\frac{1}{\omega}+\frac{\sin 2\omega}{\omega^2}\right)\sin 2\omega\,\mathrm{d}\omega\\
&=\left\{\begin{array}{c}\omega=t\\ d\omega=dt\end{array}\right\}\\
&=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\left(-\frac{\cos 2t}{t}-\frac{1}{t}+\frac{\sin 2t}{t^2}\right)\sin 2t\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\left(-\frac{\cos 2t\sin 2t}{t}-\frac{\sin 2t}{t}+\frac{\sin^2 2t}{t^2}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\left(-\frac{\sin 4t}{2t}-\frac{\sin 2t}{t}+\frac{\sin^2 2t}{t^2}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{2}{\pi}I
\end{aligned}$$

iz čega slijedi da je $I=\frac{\pi}{2}\cdot f(2)$.

Konačno, odredimo $f(2)$. Funkcija f ima prekid u točki $x=2$, $f(2)$ računamo na sljedeći način:

$$f(2)=\frac{\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)+\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}.$$

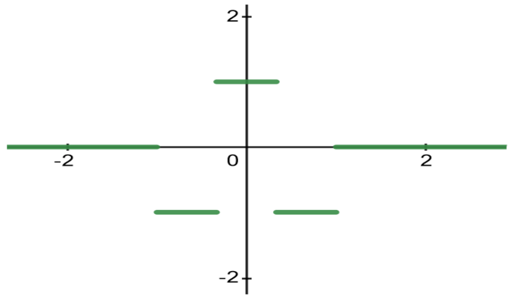
Sada je $I=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}$.

3. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{9}-x^2\right), & x\in[-1,1]\\ 0, & \text{inače,}\end{cases}$$

te odredite

$$I=\int\limits_0^\infty\left(-\frac{\sin t}{t}+\frac{2\sin\frac{t}{3}}{t}\right)\mathrm{d}t.$$



Slika 31: Graf funkcije (zadatak 3.)

Kako je $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0, \end{cases}$

to je na segmentu $[-1, 1]$

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{9} - x^2\right) = \begin{cases} 1, & x \in \langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \rangle \text{, jer tada je } \frac{1}{9} - x^2 > 0 \\ -1, & x \in [-1, -\frac{1}{3}\rangle \cup \langle \frac{1}{3}, 1] \text{, jer tada je } \frac{1}{9} - x^2 < 0 \\ 0, & x = -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Sada zadanu funkciju f možemo zapisati u sljedećem obliku

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \rangle \\ -1, & x \in [-1, -\frac{1}{3}\rangle \cup \langle \frac{1}{3}, 1] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Funkcija f je parna iz čega slijedi da je $B(\omega) = 0$, a $A(\omega)$ računamo:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \cos \omega x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{3}} \cos \omega x \, \mathrm{d}x - \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{3}}^1 \cos \omega x \, \mathrm{d}x + \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_1^\infty 0 \cdot \cos \omega x \, \mathrm{d}x}_{0} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega x \Big|_0^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{\omega} \sin \omega x \Big|_{\frac{1}{3}}^1 \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin \frac{\omega}{3}}{\omega} - \frac{\sin \omega}{\omega} + \frac{\sin \frac{\omega}{3}}{\omega} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{2 \sin \frac{\omega}{3}}{\omega} - \frac{\sin \omega}{\omega} \right). \end{aligned}$$

Fourierov integral funkcije f glasi:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{2\sin\frac{\omega}{3}}{\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega} \right) \cos\omega x \, \mathrm{d}\omega.$$

Preostaje odrediti integral I. Specijalno, za $x = 0$ dobivamo traženi integral

$$f(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{2\sin\frac{\omega}{3}}{\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega} \right) \mathrm{d}\omega = \left\{ \begin{array}{c} \omega = t \\ d\omega = dt \end{array} \right\} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{2\sin\frac{t}{3}}{t} - \frac{\sin t}{t} \right) \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} I,$$

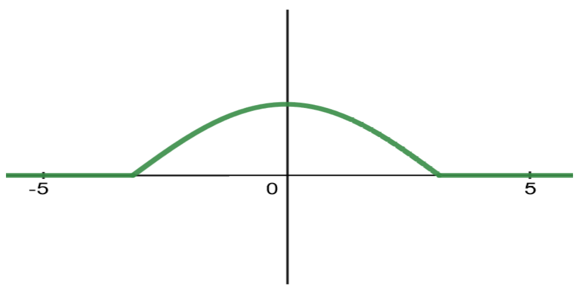
odnosno $I = \dfrac{\pi}{2} \cdot f(0)$. Kako je $0 \in \langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \rangle$ i $f(0) = 1$ konačno je $I = \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2}$.

4. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos\frac{x}{2}, & x \in [-\pi, \pi] \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

te odredite

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos\pi t}{1 - 4t^2} \, \mathrm{d}t.$$



Slika 32: Graf funkcije (zadatak 4.)

Funkcija f je parna iz čega slijedi da je $B(\omega) = 0$, a $A(\omega)$ računamo:

$$
\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos\omega x \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\omega x\,\mathrm{d}x + \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{\infty} 0\cdot\cos\omega x\,\mathrm{d}x}_{0} \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(\omega+\frac{1}{2}\right)x + \cos\left(\omega-\frac{1}{2}\right)x\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\omega+\frac{1}{2}}\sin\left(\omega+\frac{1}{2}\right)x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\omega-\frac{1}{2}}\sin\left(\omega-\frac{1}{2}\right)x\Big|_0^{\pi}\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\omega+\frac{1}{2}}\sin\left(\omega\pi+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\omega-\frac{1}{2}}\sin\left(\omega\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos\omega\pi}{\omega+\frac{1}{2}} - \frac{\cos\omega\pi}{\omega-\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\omega\cos\omega\pi - \frac{1}{2}\cos\omega\pi - \omega\cos\omega\pi - \frac{1}{2}\cos\omega\pi}{\omega^2-\frac{1}{4}} \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\cos\omega\pi}{\frac{1}{4}-\omega^2} \\
&= \frac{8\cos\omega\pi}{\pi\left(1-4\omega^2\right)}.
\end{aligned}
$$

Fourierov integral funkcije f glasi:

$$
f(x) = \int_0^{\infty}\frac{8\cos\pi\omega}{\pi\left(1-4\omega^2\right)}\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega.
$$

Preostaje odrediti integral I. Specijalno, za $x = 0$ dobivamo traženi integral

$$
f(0) = \int_0^{\infty}\frac{8\cos\pi\omega}{\pi(1-4\omega^2)}\mathrm{d}\omega = \left\{\begin{array}{c}\omega = t\\ d\omega = dt\end{array}\right\} = \int_0^{\infty}\frac{8\cos\pi t}{\pi(1-4t^2)}dt = \frac{8}{\pi}I,
$$

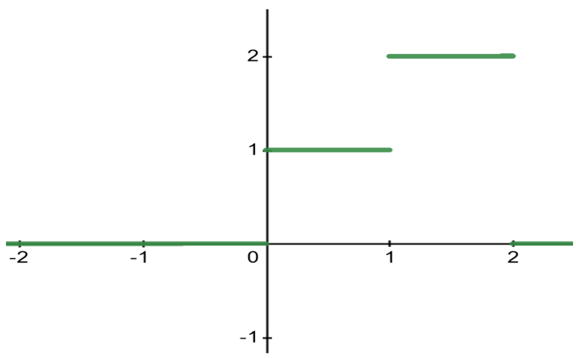
odnosno $I = \frac{\pi}{8}\cdot f(0)$. Kako je $0 \in [-\pi,\pi]$ i $f(0) = 2\cos\frac{0}{2} = 2\cdot 1 = 2$ konačno je $I = \frac{\pi}{8}\cdot 2 = \frac{\pi}{4}$.

5. Prikažite Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2, & 1 < x < 2 \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

te odredite

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}(4\cos t - 1)\,\mathrm{d}t.$$



Slika 33: Graf funkcije (zadatak 5.)

Funkcija f nije ni parna ni neparna stoga računamo i kosinusni i sinusni spektar:

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} 0\cdot\cos\omega x\,\mathrm{d}x}_{0} + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos\omega x\,\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_1^2 \cos\omega x\,\mathrm{d}x + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_2^\infty 0\cdot\cos\omega x\,\mathrm{d}x}_{0} \\
&= \frac{1}{\pi\omega}\sin\omega x\Big|_0^1 + \frac{2}{\pi\omega}\sin\omega x\Big|_1^2 \\
&= \frac{\sin\omega}{\pi\omega} + \frac{2\sin 2\omega}{\pi\omega} - \frac{2\sin\omega}{\pi\omega} \\
&= \frac{-\sin\omega + 2\sin 2\omega}{\pi\omega},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x \,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} 0\cdot\sin\omega x\,\mathrm{d}x}_{0} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}\sin\omega x\,\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_{1}^{2}\sin\omega x\,\mathrm{d}x + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{2}^{\infty} 0\cdot\sin\omega x\,\mathrm{d}x}_{0} \\
&= -\frac{1}{\pi\omega}\cos\omega x\Big|_0^1 - \frac{2}{\pi\omega}\cos\omega x\Big|_1^2 \\
&= -\frac{\cos\omega}{\pi\omega} + \frac{1}{\pi\omega} - \frac{2\cos 2\omega}{\pi\omega} + \frac{2\cos\omega}{\pi\omega} \\
&= \frac{1+\cos\omega - 2\cos 2\omega}{\pi\omega}.
\end{aligned}
$$

Fourierov integral funkcije f glasi:

$$
f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\omega}\left((-\sin\omega + 2\sin 2\omega)\cos\omega x + (1+\cos\omega - 2\cos 2\omega)\sin\omega x\right)\mathrm{d}\omega.
$$

Preostaje odrediti integral I. Specijalno, za $x = 0$ dobivamo traženi integral

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\omega}(-\sin\omega + 2\sin 2\omega)\,\mathrm{d}\omega = \left\{\begin{matrix}\omega = t\\ d\omega = dt\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{t}(-\sin t + 2\sin 2t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{t}(-\sin t + 4\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin t}{t}(4\cos t - 1)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}I,
\end{aligned}
$$

odnosno $I = \pi\cdot f(0)$. Funkcija f ima prekid u točki $x = 0$ pa $f(0)$ računamo na sljedeći način:

$$
f(0) = \frac{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) + \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.
$$

Konačno je $I = \pi\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

7 LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

7.1 Osnovni pojmovi

Neka je f funkcija realnog argumenta t, definirana za $t > 0$ i s vrijednostima u skupu realnih ili kompleksnih brojeva. Neka je s realni ili kompleksni parametar.
Laplaceov transformat funkcije f je funkcija F definirana sa

$$F(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t$$

za svaki s za koji ovaj nepravi integral konvergira. Funkcija f se naziva **original** ili gornja funkcija, a $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ **slika** ili donja funkcija.

Originale označavamo malim slovima f, g, h a njihove slike velikim slovima F, G, H.

Pridruživanje $f \mapsto F$ nazivamo **Laplaceova transformacija** i označavamo ga s $\mathcal{L}$. Dakle, $\mathcal{L}(f) = F$. Obratna veza, koja slici pridružuje original, naziva se **inverzna Laplaceova transformacija** i označava s $\mathcal{L}^{-1}$. Dakle, $\mathcal{L}^{-1}(F) = f$.

Da je originalu f pridružena slika F možemo zapisati i ovako:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s)$$

a obratnu vezu zapisujemo

$$F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, f(t).$$

Tablica osnovnih Laplaceovih transformata

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\mathrm{sh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\mathrm{ch}(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

Svojstva Laplaceove transformacije

$$f(t) \multimap F(s), a > 0, g(t) \multimap G(s)$$

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \text{ je step funkcija.}$$

$\alpha f(t) + \beta g(t) \multimap \alpha F(s) + \beta G(s)$
$f(at) \multimap \frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$
$e^{-at} f(t) \multimap F(s+a)$
$f(t-a) u(t-a) \multimap e^{-as} F(s)$
$f'(t) \multimap sF(s) - f(0)$
$f^{(n)}(t) \multimap s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
$t^n f(t) \multimap (-1)^n F^{(n)}(s)$
$\frac{f(t)}{t} \multimap \int\limits_s^\infty F(s) ds$
$\int\limits_0^t f(\tau) d\tau \multimap \frac{F(s)}{s}$

Rješavanje diferencijalnih jednadžbi

Pomoću Laplaceove transformacije možemo rješavati početni problem koji se sastoji od linearne diferencijalne jednadžbe (reda n) s konstantnim koeficijentima

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t)$$

i početnih uvjeta

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}.$$

Postavimo problem ekvivalentan početnom preslikavajući ga u donje područje.
Neka je $x(t) \multimap X(s)$ i $f(t) \multimap F(s)$. Tada je

$$\begin{array}{lcr} x'(t) & \multimap & sX(s) - x(0) = sX(s) - x_0 \\ x''(t) & \multimap & s\left(sX(s) - x_0\right) - x'(0) = s^2 X(s) - sx_0 - x_1 \\ \vdots & & \\ x^{(n)}(t) & \multimap & s^n X(s) - s^{n-1} x_0 - s^{n-2} x_1 - \cdots - s x_{n-1} - x_n, \end{array}$$

pa (DJ) prelazi u

$$\begin{aligned} s^n X(s) - s^{n-1} x_0 - \cdots - x_n + a_{n-1} \left[s^{n-1} X(s) - s^{n-2} x_0 - \cdots - x_{n-1}\right] \\ + \cdots + a_1 \left[sX(s) - x_0\right] + a_0 X(s) = F(s). \end{aligned}$$

Nakon sređivanja, ovu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$P(s)X(s) + G(s) = F(s).$$

gdje je $P(s)$ karakteristični polinom diferencijalne jednadžbe (stupnja n), a $G(s)$ neki polinom stupnja $n-1$. Odavde dobivamo

$$X(s) = \frac{F(s) - G(s)}{P(s)},$$

kojeg trebamo vratiti u gornje područje.

7.2 Zadaci

1. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije $f(t) = t,\, t \geq 0$.
2. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije $f(t) = (3 - 2t)\, e^{-5t}$.
3. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije $f(t) = \cos^2 t$.
4. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije $f(t) = e^{3t}\, t\, \sin^2 t$.
5. Koristeći Laplaceovu transformaciju izračunajte $\int_0^{\infty} e^{-7t}\, t\, \sin t \,\mathrm{d}t$.
6. Koristeći Laplaceovu transformaciju izračunajte $\int_0^{\infty} e^{-t}\, t^2\, \cos t \,\mathrm{d}t$.
7. Izračunajte original funkcije $F(s) = \dfrac{3s+7}{s^2 - 2s - 3}$.
8. Izračunajte original funkcije $F(s) = \dfrac{1}{s^2 + 6s + 13}$.
9. Izračunajte $L^{-1}[F(s)](t)$ ako je $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{(s+3)^2}$.
10. Izračunajte $L^{-1}[F(s)](t)$ ako je $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s(s-1)}$.
11. Primjenom Laplaceove transformacije riješite početni problem
$$y'' - y' - 6y = 0, \;\; y(0) = -2, \;\; y'(0) = 3.$$
12. Primjenom Laplaceove transformacije riješite početni problem
$$y'' - 3y' + 2y = te^t, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = -2.$$
13. Primjenom Laplaceove transformacije riješite sustav diferencijalnih jednadžbi
$$\begin{aligned} y' + 3y + z &= 0 \\ z' - y + z &= 0, \end{aligned}$$
uz početne uvjete $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

Rješenja:

1. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije $f(t) = t$, $t \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-st} t\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to\infty}\left(\int_0^a e^{-st} t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \begin{Bmatrix} u = t & dv = e^{-st}\mathrm{d}t \\ du = dt & v = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{Bmatrix} \\
&= \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^a + \frac{1}{s}\int_0^a e^{-st}\mathrm{d}t\right) \\
&= \lim_{a\to\infty}\left(\underbrace{-\frac{a}{s}e^{-sa}}_{0} + \frac{0}{s}e^0 - \frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^a\right) \\
&= \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{s^2}\left(e^{-sa} - e^0\right)\right) = -\frac{1}{s^2}(0-1) = \frac{1}{s^2},\ s > 0
\end{aligned}$$

jer je

$$\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{a}{s}e^{-sa}\right) = -\frac{1}{s}\lim_{a\to\infty}\frac{a}{e^{sa}} \overset{\mathrm{L'H}}{=} -\frac{1}{s^2}\lim_{a\to\infty}\frac{1}{e^{sa}} = 0.$$

2. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije $f(t) = (3-2t)\,e^{-5t}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)](s) &= \mathcal{L}\left[(3-2t)\,e^{-5t}\right](s) = \mathcal{L}\left[3e^{-5t} - 2te^{-5t}\right](s) \\
&\overset{1^\circ}{=} 3\mathcal{L}\left[e^{-5t}\right](s) - 2\mathcal{L}\left[t\,e^{-5t}\right](s) \\
&\overset{2^\circ}{=} 3\mathcal{L}[1](s+5) - 2\mathcal{L}[t](s+5) \\
&= \frac{3}{s+5} - \frac{2}{(s+5)^2} = \frac{3s+13}{(s+5)^2},\ s > 0.
\end{aligned}$$

1° $\alpha f(t) + \beta g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \alpha F(s) + \beta G(s)$

2° $e^{-at} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s+a)$

3. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije $f(t) = \cos^2 t$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)](s) &= \mathcal{L}\left[\cos^2 t\right](s) = \mathcal{L}\left[\frac{1+\cos 2t}{2}\right](s) \\
&\overset{1^\circ}{=} \frac{1}{2}\mathcal{L}[1](s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos 2t](s) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4}\right),\ s > 0.
\end{aligned}$$

4. Izračunajte Laplaceov transformat funkcije $f(t) = e^{3t}\, t\, \sin^2 t$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)](s) &= \mathcal{L}\left[e^{3t}\, t\, \sin^2 t\right](s) \overset{2^\circ}{=} \mathcal{L}\left[t\, \sin^2 t\right](s-3) \\
&= \mathcal{L}\left[t\, \frac{1-\cos 2t}{2}\right](s-3) \\
&\overset{1^\circ}{=} \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[t](s-3) - \mathcal{L}[t\, \cos 2t](s-3)\right) \\
&\overset{3^\circ}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s-3)^2} - (-1)^1 \frac{d}{ds}\mathcal{L}[\cos 2t](s-3)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s-3)^2} + \frac{d}{ds}\left(\frac{s-3}{(s-3)^2+4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s-3)^2} + \frac{d}{ds}\left(\frac{s-3}{s^2-6s+13}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s-3)^2} + \frac{-s^2+6s-5}{(s^2-6s+13)^2}\right).
\end{aligned}$$

3° $t^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$

5. Koristeći Laplaceovu transformaciju izračunajte $\int\limits_0^\infty e^{-7t}\, t\, \sin t\, \mathrm{d}t$.

Budući da je $\mathcal{L}[f(t)](s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t$ slijedi $f(t) = t\, \sin t$ i $s = 7$. Dakle,

$$\int\limits_0^\infty e^{-7t}\, t\, \sin t\, \mathrm{d}t = \mathcal{L}[t\, \sin t](7).$$

Računamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t\, \sin t](s) &= (-1)\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\sin t](s) \\
&= (-1)\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) \\
&= (-1)\frac{d}{ds}\left((s^2+1)^{-1}\right) \\
&= (-1)(-1)(s^2+1)^{-2}\, 2s \\
&= \frac{2s}{(s^2+1)^2},
\end{aligned}$$

pa je $\mathcal{L}[t\, \sin t](7) = \dfrac{2\cdot 7}{(7^2+1)^2} = \dfrac{14}{2500}$.

6. Koristeći Laplaceovu transformaciju izračunajte $\int\limits_0^\infty e^{-t}\, t^2\, \cos t\, \mathrm{d}t$.

Kako je $\mathcal{L}[f(t)](s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$ slijedi da je $f(t) = t^2 \cos t$ i $s = 1$. Dakle,

$$\int\limits_0^\infty e^{-t}\, t^2 \cos t\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}\left[t^2 \cos t\right](1).$$

Računamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[t^2 \cos t\right](s) &= (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}[\cos t](s) \\
&= \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) \\
&= \frac{d}{ds}\left(\frac{1-s^2}{(s^2+1)^2}\right) \\
&= \frac{2s(s^2-3)}{(s^2+1)^3}
\end{aligned}$$

pa je $\mathcal{L}\left[t^2 \cos t\right](1) = \dfrac{2\cdot 1\cdot(1^2-3)}{(1^2+1)^3} = -\dfrac{1}{2}$.

7. Izračunajte original funkcije $F(s) = \dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}$.

Nazivnik funkcije možemo faktorizirati $s^2-2s-3 = (s-3)(s+1)$ pa funkciju $F(s)$ rastavljamo na parcijalne razlomke. Imamo:

$$\frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1}$$

iz čega slijedi da je $A = 4,\ B = -1$, tj. $F(s) = \dfrac{4}{s-3} - \dfrac{1}{s+1}$. Original funkcije je:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s-3} - \frac{1}{s+1}\right](t) \\
&= 4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right](t) = 4e^{3t} - e^{-t}.
\end{aligned}$$

8. Izračunajte original funkcije $F(s) = \dfrac{1}{s^2+6s+13}$.

Nazivnik funkcije se ne može faktorizirati, ali se može dopuniti do kvadrata binoma: $s^2+6s+13 = (s+3)^2+4$. Original funkcije je:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)^2+4}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\,\frac{2}{(s+3)^2+4}\right](t) \\
&= \frac{1}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+3)^2+4}\right](t) = \frac{1}{2}e^{-3t}\sin 2t.
\end{aligned}$$

9. Izračunajte $\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$ ako je $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{(s+3)^2}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{(s+3)^2}\right](t) \\
&\overset{4^\circ}{=} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)^2}\right](t-2)\cdot u(t-2) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1!}{(s+3)^2}\right](t-2)\cdot u(t-2) \\
&= (t-2)\,e^{-3(t-2)}u(t-2) = (t-2)\,e^{-3t+6}\,u(t-2).
\end{aligned}$$

4° $f\,(t-a)\,u(t-a) \circ\!\!-\!\!\bullet\; e^{-as}F(s)$

10. Izračunajte $\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$ ako je $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s(s-1)}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s(s-1)}\right](t) \\
&\overset{4^\circ}{=} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s-1)}\right](t-1)\cdot u(t-1) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s}+\frac{1}{s-1}\right](t-1)\cdot u(t-1) \\
&= -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right](t-1)\cdot u(t-1) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right](t-1)\cdot u(t-1) \\
&= \left(-1+e^{t-1}\right)u(t-1).
\end{aligned}$$

11. Primjenom Laplaceove transformacije riješite početni problem

$$y'' - y' - 6y = 0,\; y(0) = -2,\; y'(0) = 3.$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}[y''](s) - \mathcal{L}[y'](s) - 6\mathcal{L}[y](s) = 0 \\
&s^2\mathcal{L}[y](s) - s\cdot y(0) - y'(0) - s\cdot\mathcal{L}[y](s) + y(0) - 6\mathcal{L}[y](s) = 0 \\
&s^2\mathcal{L}[y](s) + 2s - 3 - s\cdot\mathcal{L}[y](s) - 2 - 6\mathcal{L}[y](s) = 0 \\
&\mathcal{L}[y](s)(s^2 - s - 6) = -2s + 5 \\
&\mathcal{L}[y](s) = \frac{-2s+5}{s^2-s-6} \\
&\mathcal{L}[y](s) = \frac{-2s+5}{(s-3)(s+2)}
\end{aligned}$$

$\mathcal{L}[y](s)$ rastavljamo na parcijalne razlomke:

$$\frac{-2s+5}{s^2-s-6} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+2}$$

iz čega slijedi da je $A = \frac{-1}{5}$, $B = \frac{-9}{5}$, to jest

$$\mathcal{L}[y](s) = -\frac{1}{5(s-3)} - \frac{9}{5(s+2)}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{5(s-3)} - \frac{9}{5(s+2)}\right](t) \\ &= -\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right](t) - \frac{9}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right](t) \\ &= -\frac{1}{5}e^{3t} - \frac{9}{5}e^{-2t}. \end{aligned}$$

12. Primjenom Laplaceove transformacije riješite početni problem

$$y'' - 3y' + 2y = te^t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2.$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}[y''](s) - 3\mathcal{L}[y'](s) + 2\mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[te^t](s) \\ &s^2\mathcal{L}[y](s) - s \cdot y(0) - y'(0) - 3(s \cdot \mathcal{L}[y](s) - y(0)) + 2\mathcal{L}[y](s) = \frac{1!}{(s-1)^2} \\ &s^2\mathcal{L}[y](s) - s + 2 - 3s \cdot \mathcal{L}[y](s) + 3 + 2\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{(s-1)^2} \\ &\mathcal{L}[y](s)(s^2 - 3s + 2) = \frac{1}{(s-1)^2} + s - 5 \\ &\mathcal{L}[y](s)((s-1)(s-2)) = \frac{s^3 - 7s^2 + 11s - 4}{(s-1)^2} \\ &\mathcal{L}[y](s) = \frac{s^3 - 7s^2 + 11s - 4}{(s-1)^3(s-2)} \end{aligned}$$

$\mathcal{L}[y](s)$ rastavljamo na parcijalne razlomke:

$$\frac{s^3 - 7s^2 + 11s - 4}{(s-1)^3(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-1)^3} + \frac{D}{s-2}$$

iz čega slijedi da je $A = 3$, $B = -1$, $C = -1$, $D = -2$, to jest

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{3}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} - \frac{2}{s-2}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} - \frac{2}{s-2}\right](t) \\ &= 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^3}\right](t) - 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right](t) \\ &= 3e^t - te^t - \frac{t^2}{2}e^t - 2e^{2t}. \end{aligned}$$

13. Primjenom Laplaceove transformacije riješite sustav diferencijalnih jednadžbi

$$y' + 3y + z = 0$$
$$z' - y + z = 0,$$

uz početne uvjete $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

$$\mathcal{L}[y'](s) + 3\mathcal{L}[y](s) + \mathcal{L}[z](s) = 0$$
$$\mathcal{L}[z'](s) - \mathcal{L}[y](s) + \mathcal{L}[z](s) = 0$$

$$s\mathcal{L}[y](s) - y(0) + 3\mathcal{L}[y](s) + \mathcal{L}[z](s) = 0$$
$$s\mathcal{L}[z](s) - z(0) - \mathcal{L}[y](s) + \mathcal{L}[z](s) = 0$$

$$(s+3)\mathcal{L}[y](s) + \mathcal{L}[z](s) = 1 \tag{1}$$
$$(s+1)\mathcal{L}[z](s) - \mathcal{L}[y](s) = 1 \tag{2}$$

Iz jednadžbe (1) je

$$\mathcal{L}[z](s) = 1 - (s+3)\mathcal{L}[y](s). \tag{3}$$

Uvrštavanjem (3) u (2) dobivamo

$$(s+1)(1 - (s+3)\mathcal{L}[y](s)) - \mathcal{L}[y](s) = 1,$$

iz čega slijedi

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{s}{(s+2)^2}. \tag{4}$$

Zatim, uvrštavanjem (4) u (3) dobivamo

$$\mathcal{L}[z](s) = \frac{s+4}{(s+2)^2}.$$

Konačno,

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+2)^2}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2-2}{(s+2)^2}\right](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right](t) - 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2}\right](t) \\ &= e^{-2t} - 2te^{-2t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+4}{(s+2)^2}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2+2}{(s+2)^2}\right](t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right](t) + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2}\right](t) \\ &= e^{-2t} + 2te^{-2t}. \end{aligned}$$

8 LITERATURA

[1] Fourierov red i integral, Laplaceova transformacija, N. Elezović, Element, 2010.

[2] Vektorska analiza, L. Korkut, M. Krnić, M. Pašić, Element, 2009.

[3] http://lavica.fesb.unist.hr/matematika3/predavanja/index.html

[4] Razni primjeri s kolokvija i ispita s FESB-a, FER-a, FSB-a.